Séries numériques et familles sommables

11 novembre 2016

Table des matières

Ce chapitre contient des rappels du cours de première année et le prolonge selon trois axes : séries dont les termes appartiennent à un espace vectoriel normé, compléments sur les séries numériques, familles sommables...
Nous sommes là au cœur de toute l'analyse depuis la fin du XVIII^{ième} siècle. Nous obtiendrons dès ce chapitre des résultats à l'esthétique certaine comme les jolies formules du tableau 5.5. Plus encore, les outils que nous développons ici interviennent dans un grand nombre de problèmes. Nous apprendrons, dans des chapitres ultérieurs, à écrire de nouvelles fonctions comme sommes de séries, permettant ainsi de résoudre certaines équations différentielles ou équations aux dérivées partielles...

1 Séries dans un espace normé

1.1 Généralités

Définition 1 *qu'est-ce qu'une série ?*
- Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite d'éléments de $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou d'un espace vectoriel normé $(E, || \, ||_E)$. La **série de terme général** u_n, que l'on note $\sum u_n$ est la suite $(S_n)_n$ définie par
$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$
- Les termes de cette suite sont les **sommes partielles** de la série.
- On dit alors que la série de terme général u_n **converge,** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_n$, converge. Sa limite, qui est alors notée
$$S = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = \lim S_n,$$
est la **somme de la série.** On distinguera donc sommes partielles et somme (lorsqu'elle existe) d'une série.
- Dans le cas contraire, la série est dite **divergente.**
- On dit que deux séries sont de **même nature** si elles sont simultanément convergentes ou divergentes.
- Si une série converge, son terme général a pour limite 0 puisqu'en effet,
$$\lim u_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = 0.$$
Lorsque cette condition nécessaire n'est pas remplie, on dit que la série est **grossièrement divergente.**

Définition 2 *reste d'une série convergente*
Lorsque la série de terme général $(u_k)_{k\geq k_0}$ converge et a pour somme
$$S = \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k,$$
on définit pour $n \geq k_0$, son reste à l'ordre n comme la différence $R_n = S - S_n$

• La suite des restes, définie lorsqu'une série converge, a donc toujours pour limite 0. Par ailleurs, comme pour tout (n, p),

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=k_0}^{n+p} u_k - \sum_{k=k_0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$$

en faisant $p \to +\infty$, il vient :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

• Suites et séries

A toute suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ on associe la série de terme général u_n qui est, par définition, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
Réciproquement, une suite quelconque peut être vue comme une série :

Théorème 1
Soit $(x_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de E. Cette suite est la suite des sommes partielles de la série de terme général défini par

$$\begin{cases} \sigma_{n_0} & = x_{n_0} \\ \sigma_n & = x_n - x_{n-1} \text{ si } n > n_0 \end{cases}$$

En d'autres termes, pour tout $n \geq n_0$,

$$x_n = \sum_{k=n_0}^{n} \sigma_k.$$

Démonstration : simple vérification...

• Sous-espace des séries convergentes

Théorème 2
L'ensemble des séries convergentes dont le terme général appartient à $(E, || \, ||)$ evn sur le corps $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
L'application qui, à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace.
Cela signifie que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \, u_n + \beta \, v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Démonstration : Ce n'est pas une démonstration technique, mais il faut pourtant identifier avec soin et lucidité les ensembles sur lesquels on travaille. On la détaille ici, parce que je n'aurai sûrement pas envie d'en parler en classe.

• Une série est une suite de sommes partielles, donc un élément de $E^{\mathbb{N}}$, ensemble de toutes les suites définies sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans E (on considère les séries de terme général u_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}$). Comme on l'a vu dans le théorème précédent, tout élément de $E^{\mathbb{N}}$ peut être considéré comme une série...

• On sait (ou on vérifie sans peine) que C l'ensemble des **suites** convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$. L'ensemble des séries convergentes, est donc un sev de $E^{\mathbb{N}}$.

• Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha\, u_k + \beta\, v_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

par passage à la limite, puisque les trois séries convergent :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\, u_n + \beta\, v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

□

Exemples

Exercice 1 *séries géométriques*
Soit $q \in \mathbb{C}$. On considère la série géométrique de raison q, de terme général q^k.
On rappelle que

$$\begin{cases} S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \ \text{si}\, q \neq 1, \\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1, \text{ si } q = 1. \end{cases}$$

1. (a) Calculer la somme de la série lorsque $|q| < 1$.
   (b) Dans quels cas la série (ou la suite des sommes partielles) est elle bornée ?
2. On considère la série de terme général $u_n = \cos nt$, $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Exprimer les sommes partielles de cette série à l'aide d'une série géométrique.
   (b) Démontrer que la série est bornée lorsque $t \not\equiv 0\, [2\pi]$.

Exercice 2 *série harmonique, divergente, non grossièrement divergente*
On considère la série harmonique $\sum_k \dfrac{1}{k}$.

1. (a) Comparer les intégrales $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt$, $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$ au terme général $\dfrac{1}{k}$.
   (b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la série harmonique diverge et donner un équivalent de ses sommes partielles.

2. En minorant la différence

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$

et en raisonnant par l'absurde,

Résumé pour les séries géométriques

$\lvert q\rvert < 1$	la série converge (absolument) et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
$q = 1$	la série diverge grossièrement, $\lim S_n = +\infty;$
$q \neq 1$ et $\lvert q\rvert = 1$	la série diverge grossièrement, $(S_n)_n$ est bornée : $\lvert S_n\rvert \leq \dfrac{2}{\lvert 1-q\rvert}$
$\lvert q\rvert > 1$	la série diverge grossièrement et $\lim \lvert S_n\rvert = +\infty;$

1.2 Séries absolument convergentes

Définition 3 *séries absolument convergentes*
On dit qu'une série $\sum u_n$ dont le terme général appartient à l'evn $(E, || \ ||_E)$, est **absolument convergente** lorsque la série des des normes $\sum ||u_n||_E$ est convergente.

Rappelons le résultat démontré en première année (qui figure aussi page 16, dans le paragraphe dévolu aux séries à termes positifs), que nous utilisons dans la démonstration du théorème 3 :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à ?.
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge également.

Théorème 3
Dans $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, || \ ||_E)$, toute série absolument convergente est également convergente. De plus

$$|| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k ||_E \leq \sum_{k=n}^{+\infty} ||u_k||_E.$$

Démonstration

On reprend la démonstration du cours de première année pour les séries à termes réels, on prouve ensuite le résultat dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{C}$, on montre comment l'étendre aux séries dont le terme général appartient à $\mathbb{R}^n$ ou à un evn de dimension finie.

• Cas des séries de nombres réels

Rappelons une définition qui nous sera utile dans notre démonstration : lorsque $u \in \mathbb{R}$, on définit les deux nombres positifs $u^+ = \max(u, 0), u^- = \max(-u, 0)$ avec les propriétés suivantes :

$u^+ = \max(u, 0) \geq 0$	$u^- = \max(-u, 0) \geq 0$
$u = u^+ - u^-$	$\lvert u\rvert = u^+ + u^-$
si $u \geq 0, u = u^+ \ et \ u^- = 0$	si $u \leq 0, u = -u^- \ et \ u^+ = 0$

Considérons alors une série de nombres réels $\sum u_n$ telle que $\sum |u_n|$ converge.
Comme $u_n^+ \leq |u_n|$ et $u_n^- \leq |u_n|$ les deux séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent elles aussi puisque leurs sommes partielles sont des suites croissantes et majorées :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^+ \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \sum_{K=0}^{\infty} |u_k| = cste,$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^- \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \sum_{K=0}^{\infty} |u_k| = cste.$$

On en déduit alors que la série $\sum u_n$ converge elle aussi puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$, et qu'une somme de séries convergentes est convergente.

• Cas des séries de nombres complexes

On observe que pour tout complexe u, $|Re(u)| \leq |u|$, $|Im(u)| \leq |u|$. Ainsi, si la série des modules $\sum |u_n|$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |Re(u_n)|$ et $\sum |Im(u_n)|$ sont aussi convergentes.
Les séries de nombres réels, $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont donc absolument convergentes et convergent donc. Il en va de même de $\sum u_n$, somme des deux séries convergentes $\sum Re(u_n)$ et $\sum i\, Im(u_n)$.

• Cas des séries d'éléments d'un evn de dimension finie

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\sum u_n$ une série dont le terme général est élément de E. Dire que cette série est absolument convergente, c'est dire que $\sum ||u_n||_E$ est une série de réels positifs qui converge.

- On observe que si $\sum ||u_n||_E$ converge, $\sum N(u_n)$ converge également pour toute norme équivalente à $||\ ||_E$ (c'est à dire une norme qui vérifie une relation du type $\alpha||\ ||_E \leq N \leq ||\ ||_E$).

En effet, s'il existe $\beta > 0$ tel que $N(u) \leq \beta ||u||_E$ pour tout $u \in E$, on a $N(u_n) \leq \beta ||u_n||_E$ et $\sum N(u_n)$ converge aussi par comparaison.

- On considère alors une base $(e_1, e_2, ..., e_d)$ de E. On définit une norme N sur E en posant pour tout $x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k$,

$$N(x) = N\left(\sum_{k=1}^{d} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{d} |x_k|.$$

On laisse le lecteur vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.

- Si $\sum u_n$ converge absolument pour une norme $|| \ ||_E$, elle converge absolument pour la norme N que nous venons de définir (comme nous l'avons observé). Notons $u_n^{(k)}$ la $k^{ième}$ coordonnée de u_n dans la base $(e_k)_{1 \leq k \leq d}$.
La suite des $k^{ièmes}$ coordonnées, $(u_n^{(k)})_n$ est absolument convergente car

$$|u_n^{(k)}| \leq N(u_n)$$

ce qui entraîne que $\sum |u_n^{(k)}|$ converge puisque son terme général est majoré par le terme général d'une série convergente ($\sum N(u_n)$). La série $\sum u_n^{(k)}$ absolument convergente, converge donc.
On sait (ou on verra dans les cours sur les evn), qu'une suite de vecteurs de E converge ssi toutes les suites de coordonnées dans une base quelconque convergent. C'est le cas ici, $(S_n)_n = (\sum_{k=0}^{n} u_k)$ converge car les d suites de coordonnées $(\sum_{k=0}^{n} u_k^{d)})_n$ convergent.

$\square$

Exemples

Exercice 3 *convergence absolue dans* $\mathbb{C}$

1. Montrer que, pour tout réel $r > 0$, $r^n \underset{n \to +\infty}{=} o(n!)$. On pourra montrer qu'il existe $C > 0$ et un rang à partir duquel $\dfrac{r^n}{n!} \leq \dfrac{C}{2^n}$.
2. Montrer que pour tout complexe z, $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge.
3. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ lorsque x est un réel ?
   Indication : penser à la formule de Taylor-reste intégrale.

Exercice 4 *convergence absolue dans un espace de matrices*
On considère l'espace E des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Choix d'une norme sur $E = \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$
   (a) Montrer que si $|| \ ||$ est une norme quelconque de $\mathbb{K}^d$, on définit une norme sur E en posant, pour une matrice $A \in E$,
   $\mathcal{N}(A) = \sup_{X \neq 0} \dfrac{||A\,X||}{||X||}$.

(b) Vérifier que la norme $\mathcal{N}$ ainsi définie vérifie :
- pour toute matrice $A \in E$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $||A\,X|| \leq \mathcal{N}(A)||X||$;
- pour tout couple de matrices $(A, B) \in E^2$, $\mathcal{N}(A\,B) \leq \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.

(c) Vérifier que, dans le cas particulier où $||X|| = ||X||_\infty$, pour toute matrice $A \in E$, on a l'inégalité [1] :

$$\mathcal{N}(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

2. Montrer que si $\mathcal{N}(A) < 1$, alors $(I_n - A)$ est inversible et préciser son inverse sous forme d'une série.
Indication : on sait que dans un anneau $(1 + q + q^2 + ... + q^n)(1 - q) = (1 - q^{n+1})$.

3. On se donne $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/5 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/5 \end{bmatrix}$.
Majorer $\mathcal{N}_\infty(A)$, en déduire que $(I_3 - A)$ est inversible, évaluer (calculette ou Scilab ou Python-Scipy) les sommes partielles de $\sum A^k$.

Corrigé **??** page **??**.

1.3 Quelques exemples remarquables

Exercice 5 *autour des séries géométriques*

1. Préciser la nature de la série $\sum \dfrac{1}{3^{2n-1} + n - 6}$.
2. Convergence et somme de $\sum x^k \cos(k\theta)$, ($|x| < 1, x$ réel).
3. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que, pour tout n,

$$|u_{n+1}| \leq q\,|u_n|.$$

Que dire de la série $\sum u_n$?

Exercice 6 *développement décimal d'un réel*
Commençons par une définition :

Définition 4 On appelle développement décimal d'un réel positif x toute suite d'entiers naturels, $(d_n)_n$, telle que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq d_n \leq 9$, et

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k}$$

On note alors $x = d_0, d_1 d_2 ... d_k ...$

1. Il y a en fait égalité : on sait donc calculer explicitement cette norme à partir des coordonnées ; c'est hors programme mais peut être vu en exercice dans le chapitre *Espaces normés.*

1. Montrer que pour toute suite $(d_n)_n$ comme ci-dessus, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k}$$

est convergente.

2. Montrer qu'un nombre décimal (ie : de la forme $N10^{-n}$)non nul admet au moins deux développements décimaux.

3. Soit x le réel dont l'écriture décimale est

$$x = 0,238\ 1456\ 1456\ 1456...1456... = 0,238\overline{1456}.$$

Prouver que c'est un nombre rationnel.

4. On suppose que x admet deux développements décimaux

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k 10^{-k}.$$

Que peut on affirmer ? Considérer le plus petit indice i_0 tel que $d_{i_0} \neq e_{i_0}$, s'il existe.

5. On se propose de montrer que tout réel $x \geq 0$ admet un développement décimal. On considère pour cela $u_n = 10^{-n} Ent(10^n x)$ et $v_n = 10^{-n} Ent(10^n x + 1)$
   (a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes
   (b) Montrer que les nombres décimaux u_n et u_{n+1}, ont leurs n premiers chiffres identiques
   (c) Montrer que x admet un développement décimal

6. Montrer que x est rationnel ssi ses développements décimaux sont périodiques à partir d'un certain rang.

On tire ici le bilan de cet exercice :

Théorème 4
– Tout réel positif admet un développement décimal.
– Si x n'est pas décimal, ce développement est unique.
– Si x est décimal, il admet deux développements

$$d_0, d_1...d_{N-1}(d_N + 1)000...0... = d_0, d_1...d_{N-1}d_N 999...9...$$

$$\text{et } \ d_0 + 1, 000...0... = d_0, 999...9...$$

– x est rationnel ssi ses développements décimaux sont périodiques à partir d'un certain rang.

Exercice 7 *séries et développements limités*

Rappelons la formule de Taylor reste-intégrale :
si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a,\ b]$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

ou **l'inégalité de Taylor Lagrange :** si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, alors

$$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| \leq \frac{\sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |b-a|^{n+1}.$$

A l'aide d'une de ces formules, ou par intégration terme à terme, déterminer les limites des séries suivantes [2] :

$\sum \frac{x^k}{k!}$	$\sum \frac{1}{k!}$	$\sum (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\sum \frac{(-x)^{k+1}}{k}$	$\sum \frac{(-1)^k}{k}$	$\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	$\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Exercice 8 *jeux de dominos*
Soit $(a_n)_n$ une suite numérique.On lui associe, comme dans le théorème 1, la série $\sum \sigma_k$ définie par $\sigma_0 = a_0$ et $\sigma_n = a_{n+1} - a_n$, les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)...$$

En déduire les sommes suivantes :

1. $\sum_k \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\sum \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$;
3. $\sum_n \frac{1}{\binom{n+p}{p}}$ pour $p \geq 2$;

2. Nous reprendrons cela avec la notion de **série entière**

1.4 Critère des séries alternées

On dit qu'une série à valeurs réelles, de terme général u_n est alternée si $(-1)^n u_n$ est de signe constant. Un des intérêts de cette notion réside dans le théorème fondamental suivant :

Théorème 5 *critère des séries alternées*
Soit $\sum u_k$ une série alternée, telle que, de plus,
- $(|u_n|)_n$ est une suite décroissante
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,

alors
- la série $\sum u_k$ est convergente
- les suites S_{2n} et S_{2n+1} des sommes partielles d'ordres $2n$ et $2n+1$ sont adjacentes et encadrent la somme de la série $\sum u_k$
- le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}$ vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.
- la somme S est du signe du premier terme u_{n_0}, et $|S| \leq |u_{n_0}|$.

Démonstration
La preuve de la convergence est facile ; **on peut pour simplifier supposer que les termes d'indices pairs sont positifs.** L'autre cas est similaire.
On commence par montrer que

$$a_n = S_{2n} = \sum_{k=k_0}^{2n} u_k \text{ et } b_n = S_{2n+1} = \sum_{k=k_0}^{2n+1} u_k,$$

sont adjacentes, ce qui est immédiat. On en déduit que, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$S_{2p+1} \leq S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq S_{2q}.$$

- Écrivons cela lorsque $p = q$ et retranchons $S_n = S_{2p}$. Cela donne :

$$u_{2p+1} = S_{2p+1} - S_{2p} \leq S - S_n = R_n \leq 0.$$

- Écrivons cela lorsque $p = q + 1$ et retranchons $S_n = S_{2p+1}$. Cela donne :

$$0 \leq S - S_n = R_n \leq u_{2p+2}.$$

Dans les deux cas le reste vérifie :

$$\boxed{|R_n| = |\textstyle\sum_{n+1}^{\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|.} \tag{1.1}$$

□

Exercice 9 *exemples de séries alternées*
Étudier la convergence des séries suivantes dont on donne les termes généraux :

1. $\frac{(-1)^n}{n}$ (série harmonique alternée)
2. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ (série de Riemann alternée)
3. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha ln(n)^\beta}$
4. $\frac{(-1)^n}{n^{1+1/n}}$
5. $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si n est un carré,} \\ (-1)^n/n & \text{sinon.} \end{cases}$
6. $(-1)^n\sqrt{n}$

1.5 Exercices

Dans quelques uns de ces exercices, on calcule explicitement des sommes de séries. Il s'agit évidemment de cas très particuliers où on sait le faire.

Exercice 10 Calculer les sommes des séries suivantes

1. $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$;
2. $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ (indication : le terme général est égal à une intégrale simple)

Exercice 11 *groupements de termes consécutifs*

1. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont on note S_n les sommes partielles. On lui associe la série de terme général
$$t_k = (u_{2k} + u_{2k+1})$$
dont on note $(T_m)_m$ la suite des sommes partielles.
   (a) Exprimer T_m en fonction des S_n.
   (b) Séparer, parmi les affirmations qui suivent, le bon grain de l'ivraie :
      - Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum t_n$ converge et leurs sommes sont les mêmes.
      - Si $\sum t_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et leurs sommes sont les mêmes.
      - Si, pour tout n, $u_n \geq 0$ et si $\sum t_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et leurs sommes sont les mêmes.
      - Si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et si $\sum t_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et leurs sommes sont les mêmes.

2. – En considérant la série bien connue, de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, montrer que

$$\ln 2 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

Comparer les nombres d'additions, de multiplications, de divisions pour calculer une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-p} près dans chaque cas ? Le regroupement des termes est il numériquement avantageux ?

– Donner de façon analogue deux exemples de séries convergeant vers $\pi/4$.

3. Généralisons ce qui précède à des regroupements d'un nombre fixe quelconque de termes. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on associe à $\sum u_n$, la série de terme général :

$$t_k = (u_{kp} + u_{kp+1} + u_{kp+2} + ... + u_{k(p+1)-1}).$$

Reprenez les questions précédentes et répondez y.

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Etudier la série de terme général

$$u_k = (-1)^k \int_0^1 t^k f(t)\, dt.$$

Exercice 13 *inverses des carrés*

On se propose de calculer la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^{\pi} (at + bt^2) \cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}.$$

2. Réécrire la somme $\sum_{k=1}^{N} \cos(nt)$

3. En déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$. Penser au lemme de Riemann qui s'énonce : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, un segment de $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t}\ dt = 0.$$

Exercice 14 $**$

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{e^{int}}{n}$ converge pour $t \in]0, 2\pi[$;

2. Calculer sa somme et en déduire les sommes $\sum_n \frac{\cos(nt)}{n}$, $\sum_n \frac{\sin(nt)}{n}$.

Voir l'exercice 16 pour un énoncé détaillé (il est plus amusant de chercher).

Exercice 15 *un contre exemple d'importance*

On définit une série $\sum a_n$ en posant $\begin{cases} a_n = \dfrac{-1}{\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ est pair ,} \\ a_n = \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

1. Montrer que la série est alternée de terme général convergeant vers 0.
2. Est-elle convergente ? On pourra utiliser le fait que la somme des $1/n^2$ converge.
3. Conclusion ?

Exercice 16

On se propose d'étudier la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. Etudier cette série dans les cas particuliers suivants :
   - $\theta = 0, \theta = 2\pi$
   - $\theta = \pi$
   - $\theta = \pi/2, \theta = 3\pi/2$. *Écrire avec soin les sommes partielles*
2. On suppose que $\theta \in]0, 2\pi[$ dans ce qui suit.
   (a) En observant que l'on peut écrire $\dfrac{1}{n}$ comme une intégrale, montrer que l'on a :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{1 - x^n e^{in\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\, dx.$$
   (b) Déterminer la limite de $(J_n)_n$ où
   $$J_n = \int_0^1 \frac{x^n e^{in\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\, dx.$$
   En déduire que la série converge. Donner une expression de sa somme sous forme d'une intégrale que l'on ne calculera pas.

2 Séries à termes positifs

2.1 Qu'ont elles de remarquable ?

Nous verrons dans cette section l'intérêt de l'étude des séries à termes positifs : critères simples de convergence, sommation des relations de comparaison, comparaison d'une série à termes positifs et d'une intégrale...
Tout repose sur le résultat qui suit, quasi-évident, et d'un usage constant :

Théorème 6
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Pour que $\sum u_n$ converge il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit bornée.

Démonstration :
$\Rightarrow$ Une suite convergente est toujours bornée ;
$\Leftarrow$ Les sommes partielles forment une suite croissante ($S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$); une suite croissante et majorée converge ■

2.2 Comparaisons des séries à termes positifs

Théorème 7
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge également.

Démonstration : sous les hypothèses de l'énoncé, en notant n_0 le rang à partir duquel $u_n \leq v_n$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k = \text{Cste}.$$

On conclut avec le théorème précédent ■

Théorème 8
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
• Si $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors, $\sum u_n$ converge également et de plus, les restes des deux séries sont comparables :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right).$$

• On a le même résultat en remplaçant O par o.

Démonstration :

• Supposons que $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$ et que $\sum v_n$ converge.
Par définition de la relation de dominance, il existe $C > 0$ et un rang n_0 à partir duquel $u_n \leq Cv_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v'_n$ avec $v'_n = Cv_n$ sont des séries à termes positifs telles que $u_n \leq v'_n$ à partir du rang n_0. Comme $\sum v'_n$ converge, il en va de même pour $\sum u_n$ d'après le théorème précédent.
Comparons leurs restes. Lorsque $n \geq n_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \leq C \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k$$

Comme les séries convergent, en faisant $p \to +\infty$, on retrouve

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k.$$

Le résultat est démontré.
• Si $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, comme on a aussi $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$, ce qui précède montre que $\sum u_n$ converge également.
Que dire des restes ? La relation $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ signifie que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

Soient alors $\varepsilon > 0$ et n_ε comme ci-dessus. Considérons $n \geq n_\varepsilon$, il vient pour tout $p \in \mathbb{N}$, tenant compte des signes de u_n et v_n :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k$$

passant à la limite nous avons :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = \varepsilon R'_n.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |R_n| \leq \varepsilon |R'_n|$, à savoir $R_n = o(R'n)$ ■

Corollaire 9

Démonstration

Théorème 10 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ alors, les deux séries sont de même nature.

– si elles convergent leurs restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

– si elles divergent leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

Démonstration

• Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to\infty}{=} O(u_n)$. Comme ce sont des séries à termes positifs, si l'une converge, il en va de même pour l'autre. Elles sont bien de même nature.

• **Supposons qu'elles convergent.** On peut écrire $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$.
Nous ne connaissons pas le signe de w_n mais $w_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow |w_n| \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$. Ainsi, d'après le théorème 8, $\sum |w_n|$ converge et $\sum w_n$ aussi.
Avec des notations évidentes, $R_n(w) \leq R_n(|w|) \underset{n\to\infty}{=} o(R_n(v))$ ainsi,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \underset{n\to\infty}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k + o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

• **Supposons qu'elles divergent.**
On a encore $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un rang n_ε à partir duquel $|w_n| \leq \varepsilon v_n$.
Ecrivons les sommes partielles d'ordre $n_\varepsilon + p$ (toujours avec des notations évidentes [3]) :

$$U_{n_\varepsilon+p} = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon+p} u_k = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon+p} v_k + \sum_{k=0}^{n_\varepsilon+p} w_k$$

Divisons comme il se doit (les séries divergent, leurs sommes sont strictement positives au delà d'un certain rang) :

$$\frac{U_{n_\varepsilon+p}}{V_{n_\varepsilon+p}} = 1 + \frac{W_{n_\varepsilon+p}}{V_{n_\varepsilon+p}} = 1 + \frac{W_{n_\varepsilon-1}}{V_{n_\varepsilon+p}} + \frac{\sum_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon+p} w_k}{V_{n_\varepsilon+p}}$$

Comme $\sum v_k$ diverge, $\lim \dfrac{W_{n_\varepsilon-1}}{V_{n_\varepsilon+p}} = 0$ et il existe un rang p_ε à partir duquel $\dfrac{W_{n_\varepsilon-1}}{V_{n_\varepsilon+p}} \leq \varepsilon$;
par ailleurs, $\left|\dfrac{\sum_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon+p} w_k}{V_{n_\varepsilon+p}}\right| \leq \dfrac{\sum_{n_\varepsilon}^{n_\varepsilon+p} |w_k|}{V_{n_\varepsilon+p}} \leq \varepsilon.$

Bilan : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang p_ε à partir duquel $\left|\dfrac{U_{n_\varepsilon+p}}{V_{n_\varepsilon+p}} - 1\right| \leq 2\varepsilon$... ■

---

3. Espérons le !

Exercice 17 *applications...*

1. Pour les séries suivantes, donner un équivalent des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)2^k, \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{n}, \ldots$$

2. Pour les séries suivantes, donner un équivalent des restes s'ils existent :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)2^{-k}, \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-k}, \ldots$$

3. VRAI ou FAUX ? Justifier ou donner un contre-exemple.
   (a) si $\lim u_n = 0$, alors $\sum u_k$ converge.
   (b) si $\sum u_k$ converge, $\lim u_n = 0$.
   (c) si $\sum |u_k|$ converge $\sum u_k$ converge.
   (d) si $\sum u_k$ converge $\sum |u_k|$ converge.
   (e) si $\sum |u_k|$ converge alors, $\sum u_k^2$ converge.
   (f) si $\sum u_k$ converge et $u_k \geq 0$, alors $\sum u_k^2$ converge.
   (g) si $u_k \sim v_k$, alors $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.
   (h) si $u_k \sim v_k$, alors $\sum |u_k|$ et $\sum |v_k|$ sont de même nature.
   (i) si $u_k \sim v_k$, et u_k et v_k sont de même signe, alors $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

2.3 Séries et intégrales

Le théorème suivant est d'une importance capitale. Il permet l'étude des séries de la forme $\sum f(k)$ lorsque f est monotone et positive. L'idée est que l'on peut comparer le terme général $f(k)$ de la série à l'intégrale de f sur les intervalles $[k-1, k],\ [k, k+1]$ de longueur 1.

Théorème 11 Soit f une fonction positive continue par morceaux, décroissante sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$, alors :

– pour tous m, n tels que $n \geq m \geq n_0$,

$$\int_m^{n+1} f(t)\ dt \leq \sum_{p=m}^{n} f(p) \leq \int_{m-1}^{n} f(t)\ dt;$$

– La série de terme général $u_n = f(n)$, converge ssi la fonction

$$x \to \int_{n_0}^{x} f(t)\, dt$$

admet une limite en $+\infty$.

– Si la série converge, alors

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} f(p) \leqslant \int_{n}^{\infty} f(t)dt$$

– Si la série diverge, alors

$$\sum_{p=n_0}^{n} f(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

Démonstration : Méthode à bien connaître, les encadrements sont très utiles et il faut les retrouver avec précision. On fera systématiquement une figure du type de la figure 1.

Théorème 12 , Soit f une fonction positive, continue par morceaux, décroissante sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$, alors :

– la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\ dt - f(n) = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\ dt$$

est convergente.

– si la série $\sum f(p)$ converge, ou si $x \to \int_0^x f(t)\ dt$ admet une limite en $+\infty$, alors :

$$\sum_{p=n_0+1}^{+\infty} w_p = \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ dt - \sum_{p=n_0+1}^{+\infty} f(p).$$

Démonstration : Établir la majoration $w_n \leq f(n-1) - f(n)$, ... le reste suit.

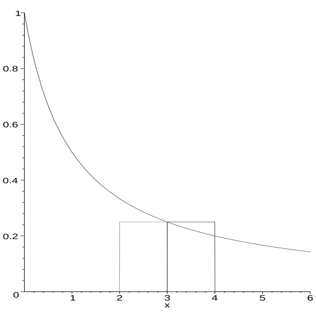


FIGURE 1 – séries et intégrales

2.4 Exemples remarquables

2.4.1 La constante d'Euler (le retour)

Exercice 18 On considère la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$, déjà rencontrée, dont nous avons prouvé qu'elle divergeait. On se propose ici d'étudier son comportement asymptotique avec plus de précision. On notera

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. Montrer qu'il existe un réel γ (voir note [4]) tel que $H_n = ln(n) + \gamma + o(1)$.

   Indication : posons $w_k = f(k) - \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$ avec $f(t) = \frac{1}{t}$ et exprimons H_n en fonction de $\int_1^n f(t)\,dt$ et $\sum w_k$.
3. Vers un encadrement de γ.
   (a) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, définies par

   $$a_n = H_n - \ln(n) \text{ et } b_n = H_n - \ln(n+1)$$

   sont adjacentes et retrouver la relation $H_n = ln(n) + \gamma + o(1)$.

   (b) Écrire une fonction Python qui prend n en argument et retourne une valeur approchée à 10^{-n} près de la constante d'Euler. Évaluez le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une telle précision.

2.4.2 Séries de Riemann

On appelle série de Riemann une série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. On démontrera le théorème suivant à titre d'exercice fondamental. Les résultats sont à connaître.

Théorème 13

- si $\alpha \leq 0$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, est grossièrement divergente.
- si $0 < \alpha \leq 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, est divergente.
  - si $0 < \alpha < 1$, les sommes partielles vérifient

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

  - si $\alpha = 1$,

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} ln(n)$$

---

4. C'est une notation usuelle, ce nombre est la constante d'Euler. Ces résultats sont dus à Euler et datent de 17... On ne sait toujours pas si γ est rationnel ou pas, question que l'on se pose depuis cette époque

– si $1 < \alpha$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, est convergente. Son reste à l'ordre n vérifie

$$R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Démonstration

2.4.3 Séries de Bertrand (exemples)

Ce sont les séries de la forme

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}, \ \frac{1}{n^\alpha ln(n)^\beta \ln(\ln(n))^\gamma}, \ etc...$$

Elles interviennent de façon classique. Les méthodes sont à connaître.

Exercice 19 *Exemples de séries de Bertrand*

1. $\sum_k \frac{1}{k \ln(k)}$
2. $\sum_k \frac{1}{k\ ln^\beta(k)}$
3. $\sum_k \frac{1}{k^\alpha ln^\beta(k)}$
4. Énoncer une cns de convergence.

2.4.4 Exercices

Exercice 20
On se propose de calculer

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 25}.$$

1. Justifier que cette série converge.
2. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $\frac{1}{n^2 - 25} = \frac{a}{n-5} + \frac{b}{n+5}$.
3. Écrire avec soin la somme partielle

$$S_N = \sum_{k=6}^{N} \frac{1}{n^2 - 25}$$

   et en déduire la somme de la série. S'agit il d'un rationnel ?

Exercice 21 *au km*

1. Étudier les séries $\sum \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n \ln n}$,
2. Convergence et somme de $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;
3. Convergence et somme de $\sum e^{-\left(n\alpha + \frac{1}{n}\right)}$ lorsque $\alpha > 0$.

2.5 Cas des fonctions croissantes, Formule de Stirling

2.5.1 Généralités

Exercice 22 On suppose que f est une fonction positive, continue par morceaux, **croissante** sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$.

1. Donner un encadrement de $\sum_{p=m}^{n} f(p)$
2. Exemples :
   – Donner un équivalent de $\sum_{p=1}^{n} \ln(p)$
   – Montrer que
   $$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{e^2}{4} \tag{2.1}$$
   – Donner un équivalent de $\sum_{p=0}^{n} \sqrt{p}$
   – Donner un équivalent de $\sum_{p=0}^{n} p^{3/2}$
   – Donner un équivalent de $\sum_{p=0}^{n} p^{\alpha}$ lorsque $\alpha > 0$. Savez vous comment calculer les sommes exactes lorsque α est un entier naturel ?

Exercice 23 *algèbre linéaire*
On se propose ici d'effectuer le calcul exact de

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} p^{\alpha}$$

lorsque α est un entier naturel.

1. Montrer que l'application Δ qui, à un polynôme $P(X)$ de $C[X]$ associe
   $$\Delta(P(X)) = P(X+1) - P(X),$$
   réalise une surjection de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$sur $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout naturel $n \geq 0$.
2. Montrer que la somme S_n est un polynôme en n. Quel est son degré ?
3. Calculer S_4, S_5...

2.5.2 Formule de Stirling

On souhaite obtenir l'équivalent de $n!$:

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.}$$

L'idée est de donner un développement asymptotique de $\sum_{k=2}^n \ln(k)$ (un équivalent ne suffirait pas, pourquoi ?) Pour cela, on pose, comme dans le théorème 12,

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t)\ dt - f(n)$$

avec $f(t) = \ln(t)$.

Exercice 24 *développement de $\sum \ln k$*

1. Donner un équivalent de $\sum_{k=2}^n \ln(k)$.
2. Montrer que
$$w_n = \int_{n-1}^n f(t)\ dt - f(n) = -\int_{n-1}^n (t+\alpha_n) f'(t)\ dt$$
pour α_n bien choisi.
3. En déduire que $w_n = \dfrac{-1}{2(n-1)} + x_n$ où $\sum x_n$ est absolument convergente.
4. Montrer que $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + K + o(1)$. En déduire que $n! \sim e^K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

Exercice 25 *intégrales de Wallis, calcul de K*
On rappelle la définition des intégrales de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\ dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\ dt.$$

1. A partir d'une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n, calculer W_{2p} et W_{2p+1}.
2. Etablir la formule de Wallis : $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
3. En écrivant un équivalent de W_{2p} de deux façons, montrer que $e^K = \sqrt{2\pi}$. En déduire la formule de Stirling ci-dessus mentionnée.

Exercice 26 *que faire avec ?*

1. Déterminer la nature des séries de termes généraux :
   (a) $\dfrac{n^n}{n!e^n}$,
   (b) $\dfrac{(2n)!}{n!a^n n^n}$,
2. calculer la limite de la suite
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{n!}{n^{n+1/2}}$$

2.6 Critère de d'Alembert.

Théorème 14 *comparaison logarithmique*
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels positifs. Si à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

alors $u_n = O(v_n)$.
En particulier, si $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison r, on obtient $u_n = O(r^n)$.

Corollaire 15 *Règle de d'Alembert*
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ admet une limite. Alors :
- si cette limite vérifie $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $\sum u_n$ converge ;
- si cette limite vérifie $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $\sum u_n$ diverge ;

Remarque : si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on se gardera de conclure trop vite.

Exercice 27 *contre-exemples et idées claires*

1. Montrer que les réciproques sont fausses (et loufoques) ;
2. Donner un exemple de série $\sum u_n$ telle que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, qui converge et une autre qui diverge ;

Exercice 28
Etudier, si possible à la lumière de ce critère, les séries de termes généraux, signaler quand une autre méthode est possible [5] :

$$\frac{z^n}{n!}, \quad \frac{1}{\sqrt{n!}}, \quad \frac{e^n\ n!}{n^n}$$

$$\frac{n!}{n^n}, \quad \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n^2}$$

Exercice 29 Que dire de la convergence des séries à termes positifs vérifiant :

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{n}{1+n}$

5. utiliser la relation (2.1) s'il le faut.

2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \dfrac{1}{(1+n)^2}$

   indications : Comparer u_n à

$$v_n = \prod_{n_0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right);$$

3. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \dfrac{\alpha}{n}$ avec $\alpha > 1$ (à partir d'un certain rang) ;
4. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \dfrac{\alpha}{n}$ avec $0 < \alpha < 1$;

2.7 Exercices

Exercice 30 *au kilomètre*
Etudier les séries suivantes, discuter s'il y a lieu :

$\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$	$\dfrac{2^{n^2}}{n^{2n}}$	$e-(1+\dfrac{1}{n})^n$	$(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}-(1+\dfrac{1}{n+1})^n$
$\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3+n-1}$	$\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3+an+b}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n^2}$
$\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{\ln n}{n^2},$	$\dfrac{(\ln n)^2}{n^2},$	$\dfrac{n^2\cos n}{n!}$
$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}};$	$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$	$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$	$\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+2}\right)$
$\dfrac{(-1)^n\ln(n+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n+2}}$	$(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{n+1}{n^2+3}\right)$	$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos(\dfrac{1}{n})$	$\cos\left(\pi n^2\ln(1+\frac{1}{n})\right)$

Exercice 31 Vrai ou faux :

1. Si la série à termes positifs, $\sum u_n$ converge, il en va de même pour $\sum u_n^2$?
2. Si la série à termes complexes, $\sum u_n$ converge, il en va de même pour $\sum u_n^2$?
3. Si les séries à termes réels $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent, il en va de même de $\sum u_n v_n$?

4. Si les séries à termes complexes $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ sont absolument convergentes, il en va de même de $\sum u_n v_n$?

Exercice 32 Etudier la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \; - 2\sqrt{n}$$

Exercice 33
Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$, avec u_n définie par $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

Exercice 34 *mines*
Soient $f : [1, +\infty[\to]0, +\infty[$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

1. Etudiez la nature de la série $\sum f(n)$
2. Donnez un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

voir corrigé en **??**

Exercice 35

1. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et strictement positives sur $[a, +\infty[$. Montrer que, si $\int_{[0,x]} g(t)\, dt$ n'est pas bornée,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x)) \;\Rightarrow\; \int_a^x f(t)\ dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_a^x g(t)\ dt\right).$$

2. On suppose que h, est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $[0, +\infty[$, telle que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h'(x)}{h(x)} = +\infty.$$
   (a) Montrer que la série de terme général $h(n)$ diverge et donner un équivalent de sa somme partielle d'ordre n.
   (b) Donner un équivalent, puis un développement à trois termes (puissances de n) de
$$\sum_{k=1}^{n} k^k.$$

3 Dénombrabilité et familles sommables

3.1 Ensembles dénombrables, au plus dénombrables

Joli et délicat, on fera quelques démonstrations seulement en classe (c'est pourquoi elles sont rédigées).

Définition 5
• Un E ensemble est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier n tel que E soit en bijection avec $[1, n]$.
• On dit qu'un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
• On dit qu'un ensemble est **au plus dénombrable** s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Il est donc fini ou dénombrable par le théorème 16.

Théorème 16
• Une partie de $\mathbb{N}$ est soit finie soit dénombrable.
• Une partie d'un ensemble au plus dénombrable est soit finie soit dénombrable (donc au plus dénombrable).

Démonstration
On peut admettre ce résultat dont nous donnons, pour le fun, une preuve algorithmique.

• Montrons le premier point. Considérons $A \subset \mathbb{N}$:
– Si A est vide, il est fini par définition.
– Sinon, raisonnons de façon algorithmique :

1. On note $A' = A$, $A" = \{\}$ et $i = 0$.
2. Tant que $A' \neq \{\}$ faire :
   (a) $a[i] = \min A'$;
   (b) $A' = A' \backslash \{a[i]\}$;
   (c) $A" = A" \cup \{a[i]\}$;
   (d) $i = i + 1$;

Observons qu'il y a au moins une itération et qu'un **invariant de boucle** est
$\boxed{i \leq \min A' = a[i],\ \ A' \cup A" = A,\ A' \cap A" = \{\},\ \text{et les élts de } A' \text{ majorent strt ceux de } A"}$.

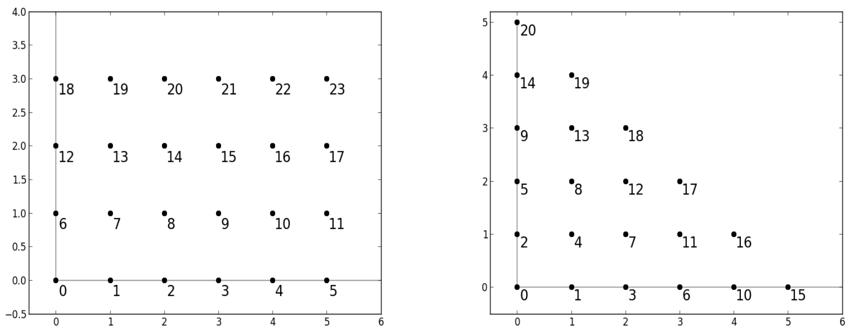
Si l'algorithme termine avec p itérations, A est fini, $i \to a[i]$ est une bijection de $[0, p-1]$ sur A. En effet,
- c'est une application : l'algorithme termine avec $i = p$ mais les affectations ont lieu avant l'incrémentation qui figure dans le corps de la boucle, il y a une affectation et une seule pour chaque i appartenant à l'intervalle [0,p-1] ;
- elle est injective : après chaque affectation l'élément ajouté à la liste a est retiré de A', il ne sera donc pas présent deux fois dans la liste ;

- elle est surjective : l'algorithme termine avec A' vide, les éléments affectés sont dans $A" = A$ (voir encadré).

Sinon, A est dénombrable et $i \to a[i]$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A.
- C'est une application : il y a toujours une affectation et une seule pour chaque i appartenant à $\mathbb{N}$;
- elle est injective : même démo ;
- elle est surjective : soit y un élément de A, à la fin de l'itération n° $y+1$ on aura $y \leq a[y]$. Cela impose $y \notin A'$ donc $y \in A"$ et par construction de $A"$, y est de la forme $a[i]$.

□

Exercice 36 *numérotations des couples d'entiers...*



1. On range $m \times n$ couples d'entiers comme sur la figure de gauche.
   (a) Définir une fonction $\phi(m, i, j)$ qui donne le n° du couple (i, j).
   (b) Écrire la fonction $\phi^{-1}(m, k)$ qui donne le couple (i, j) de numéro k.
2. On se propose maintenant de préciser la numérotation des couples de $\mathbb{N}^2$ comme sur la figure de droite.
   (a) Définir une fonction $\psi(i, j)$ qui donne le n° du couple (i, j).
   (b) Écrire avec précision la fonction $\psi^{-1}(k)$ qui donne le couple (i, j) de numéro k.
   Indications : regarder où se trouvent les couples pour lesquels $i + j = k$ et les couples dont le n° est de la forme $k(k+1)/2$...
   (c) **Algorithmique** : programmez ces deux fonctions (en Python).

Dans la deuxième question de l'exercice qui précède, nous avons explicité une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$ ce qui prouve la première assertion du théorème :

Théorème 17 *théorème fondamental de la dénombrabilité*
• $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
• Un produit cartésien **fini** d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration

Première assertion : l'exercice 36 question 2, qu'il faut savoir faire.

Seconde assertion : on commence par observer qu'un produit fini d'ensembles dénombrables, $A_1 \times A_2 \times .... \times A_p$ est en bijection avec $\mathbb{N}^p$. C'est immédiat avec

$$\Phi : (x_1, ..., x_p) \in A_1 \times ... \times A_p \to (\phi_1(x_1), ..., \phi_p(x_p)) \in \mathbb{N}^p$$

dont on vous laisse vérifier qu'elle est à la fois surjective et injective, chaque fonction ϕ_i étant une bijection de A_i sur $\mathbb{N}$...

On démontre que $\mathbb{N}^p$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ par récurrence sur $p \geq 1$.

– C'est évident si $p = 1$;

– Supposons $\mathbb{N}^p$ en bijection avec $\mathbb{N}$; on note f une bijection $f : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$.
  On définit alors $g : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}^2$ en posant :

$$g(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) = (f(x_1, ..., x_p),\ x_{p+1}) \tag{3.1}$$

  On vérifie facilement qu'elle est bijective et comme $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

□

Théorème 18

• Une réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.
• Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
• Une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
• $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
• $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstrations par le chemin des écoliers

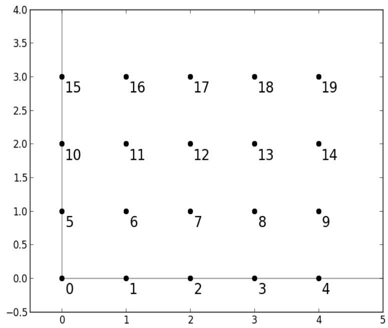
• Nous commençons, c'est plus facile, par montrer qu'une réunion finie $\cup_{i=0}^{p} A_i$ d'ensembles dénombrables et **disjoints** est dénombrable.

La démonstration se comprend bien en interprétant la figure de droite de la façon suivante : on y a $p = 4$, en première colonne, A_0 avec les éléments de n° 0, 1, 2 etc..., en deuxième colonne, A_1.

On note ϕ_i une bijection de A_i sur $\mathbb{N}$. On définit j de la façon suivante : si $x \in \cup_{i=0}^{p} A_i$, $j(x)$ est l'indice pour lequel $x \in A_{j(x)}$.

On définit l'application

$$\Phi : x \in \bigcup_{i=0}^{p} A_i \to p\,\phi_{j(x)}(x) + j(x)$$



Prouvons que Φ réalise une bijection de $\cup_{i=0}^{p} A_i$ sur $\mathbb{N}$.

– Φ est bien définie comme application : nous laissons le lecteur y réfléchir (voir les questions ci-dessous).
– Φ est bijective : on étudie, pour $y \in \mathbb{N}$, l'équation

$$\Phi(x) = p\,\phi_{j(x)}(x) + j(x) = y \tag{3.2}$$

On note pour cela $y = pq + r$ ((q, r) quotient et reste dans la DE de y par p. (3.2) devient alors, puisque $0 \leq j(x) < p$ $\begin{cases} j(x) & = r \\ \phi_{j(x)} & = q \end{cases}$ d'où l'on déduit $\boxed{x = \phi_r^{-1}(q)}$

Questions :

1. Sur la figure, que vaut $j(x)$ lorsque x est de n° 7 ?
2. Pourquoi j est elle bien une application ?
3. Pourquoi avons nous supposés les A_i disjoints ? La démonstration tiendrait elle autrement ? Où serait le point de rupture ?
4. Donner l'algorithme qui définit Φ^{-1}. Si vous deviez le programmer effectivement, quel serait le point crucial (bon sens) ?

• Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables **disjoints** est dénombrable.
On considère, avec des A_i disjoints, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. On définit comme précédemment, pour $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $j(x)$ l'indice pour lequel $x \in A_{j(x)}$.
On identifie par bijection $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ à $\mathbb{N}^2$ comme ci-dessous et on se ramène ensuite au théorème 17 ($\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$) :

$$\psi : x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \to \big(j(x), \phi_{j(x)}(x)\big) \in \mathbb{N}^2.$$

• Une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
Donnons une **idée** de la démonstration.
On note

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p \cup ...$$

On pose $A'_0 = A_0, A'_1 = A_1 \backslash A_0, ..., A'_{n+1} = A_{n+1} \backslash (A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_n), ...$
On a alors une réunion d'ensembles **disjoints** (dont certains sont peut-être vides) :

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A'_i$$

On complète chaque A'_i qui serait fini en $A"_i$ de telle sorte que les $A"_i$ soient disjoints deux à deux et bien sûr dénombrables. Alors

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A'_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A"_i$$

Ce dernier ensemble est dénombrable comme union disjointe d'ensembles dénombrables. D'après le théorème 16, A est alors au plus dénombrable.

Retour aux deux premiers énoncés du théorème. Comment se déduisent ils de leurs versions disjointes respectives et de ce dernier ?

• $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
En effet, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_-^* \cup \mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}_-^*$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ (facile).

• $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
En effet, tout $x \in \mathbb{Q}$ s'écrit $x = \dfrac{p}{q}$ avec $q > 0$. Alors, $\mathbb{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} \left\{\dfrac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}\right\}$ est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables (chaque $\left\{\dfrac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}\right\}$ est indexé sur $p \in \mathbb{Z}$). Comme par ailleurs, $\mathbb{Q}$ n'est pas fini, il est dénombrable.

$\square$

Exercice 37
On considère une application $f : I \to S$. On suppose que f est surjective et qu'un élément $x \in S$ admet un nombre fini d'antécédents par f.
Si S est dénombrable, que peut on dire de I?

3.2 Ils ne sont pas dénombrables

Exercice 38 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$
On considère l'ensemble $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites formées de 0 et de 1. On veut démontrer par l'absurde que cet ensemble n'est pas dénombrable.
On supposera donc qu'il existe une **bijection** $\Phi : \mathbb{N} \to E$.

1. Comprendre les objets, les notations :
   (a) Soit $U = (0,0,0,1,0,1,....)$ un élément de E. Au vu de cette description partielle que sont $U_0, U_1, ..., U_5$? Et U_6?
   (b) Soit $U = \Phi(p)$ ($p \in \mathbb{N}$ quelconque). Que désignent U_n, $\Phi(p)_n$?
2. On définit une suite V en posant pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} V_n & = 0 \text{ si } \Phi(n)_n = 1 \\ V_n & = 1 \text{ si } \Phi(n)_n = 0 \end{cases}$$
   (a) Que vaut V_n si $\Phi(n)$ est la suite nulle ? V est elle la suite nulle ?
   (b) Que vaut V_n si $\Phi(n)$ est la suite formée uniquement de 1 ? V est elle la suite formée uniquement de 1 ?
   (c) Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $V = \Phi(n)$?
3. Connaissez vous un ensemble non dénombrable ?

Théorème 19
$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration hors programme on peut la construire avec l'exercice 39.

Exercice 39 *les $n-1$ premières questions sont indépendantes .*

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est en bijection avec chacun de ses intervalles ouverts $]a,b[$ non vides.
   Boîte à outils non rangée : fonctions affines, , tan, $x \to \dfrac{x}{1+|x|}$.
2. Pourquoi l'application $\theta : (u_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}} \to \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{u_i}{2^i}$ est elle une surjection sur $]0,1[$?
   θ est elle injective ? Combien un élément de $]0,1[$ peut il avoir d'antécédents par θ?
   Voir le théorème 4 page 10. On transposera les résultats à la base 2 **sans refaire les démonstrations.**
3. On considère une application $f : I \to S$. On suppose que f est surjective et qu'un élément $x \in S$ admet un nombre fini d'antécédents par f.
   Si S est dénombrable, que peut on dire de I?
4. Sachant que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (exercice 38), $\mathbb{R}$ est il dénombrable ?

3.3 Familles sommables

3.3.1 Les familles sommables de réels positifs

Définition 6 *famille sommable de réels positifs*
• Soient $\mathcal{J}$ un ensemble au plus dénombrable et $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille de **réels positifs** indexée sur $\mathcal{J}$. On dit que $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ est **sommable** ssi l'ensemble des sommes

$$\sum_{i\in J} a_i$$

définies pour J partie finie de $\mathcal{J}$ est borné.
• Lorsque $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ est sommable, on définit sa **somme** comme

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} a_i = \sup_{\substack{J\subset\mathcal{J}\\ J\ finie}} \sum_{i\in J} a_i$$

• Lorsque $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ n'est pas sommable, on pose

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} a_i = +\infty.$$

• **Quelques exemples de familles indexées sur un ensemble au plus dénombrable**

- ▷ Suites doubles, familles indexées sur $\mathbb{N}^2$: ce sont les familles de la forme $(a_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
  Par exemple, $a_{(p,q)} = \dfrac{1}{p^\alpha q^\beta}$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$;
- ▷ Suites indexées sur $\mathbb{Z}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

▷ Suites indexées sur une famille dénombrable d'événements (c'est une des applications majeure de cette notion dans notre programme).

• Cas des familles indexées sur $\mathbb{N}$
Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(a_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ peut être aussi considérée comme une suite. Une **somme partielle** de la série de terme général a_i peut s'écrire

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i\in[0,n]} a_i.$$

C'est donc un **cas particulier de somme finie** attachée à la suite vue comme une famille dénombrable de termes positifs. On démontre alors le

Théorème 20 *familles sommables et séries à termes positifs*
. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une **suite** de réels positifs (c'est à dire une **famille** de réels positifs, indexée sur $\mathbb{N}$).
La famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum a_i$ est convergente.
Dans ce cas la somme de la série et la somme de la famille sommable coïncident :

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} a_i = \sup_{\substack{J\subset\mathcal{J}\\ J\ finie}} \sum_{i\in J} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Démonstration
• L'équivalence :

$\Rightarrow$ Supposons $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sommable. Les sommes partielles de la série $\sum a_i$ sont bornées puisqu'elles sont de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i\in[0,n]} a_i \le \sup_{J\subset\mathbb{N},\, J\ fini} \sum_{i\in J} a_i.$$

La suite des sommes partielles qui est croissante et majorée converge. En particulier

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in[0,n]} a_i \le \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i.$$

$\Leftarrow$ Supposons que la série converge et considérons $J \subset \mathbb{N}$, un ensemble fini. Soit $n = \sup J$. Comme $J \subset [0, n]$, on a

$$\sum_{i\in J} a_i \le S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \le \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

La famille des $\sum_{i\in J} a_i$ est donc bornée, la famille des $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sup_{J\subset\mathbb{N},\, J\ fini} \sum_{i\in J} a_i \le \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

• L'égalité des deux sommes dans le cas où la famille est sommable et la série converge découle des deux inégalités.

□

Question : Que penser de l'affirmation qui suit :
De toutes façons si une série à termes positifs converge, la somme est égale au sup des sommes partielles, il n'y a donc rien à démontrer pour l'égalité ! ?

Théorème 21 *sommation par paquets*
Si $(I_n)_n$ est une partition de l'ensemble dénombrable I, et si $(a_i)_{\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors :

1. Chacune des familles $(a_i)_{\in I_n}$ est sommable.
2. La famille $(T_n)_n$ où chaque T_n est défini par
$$T_n = \sum_{i \in I_n} a_i$$
est elle-même sommable.
3. L'égalité qui suit est vérifiée (formule de sommation par paquets) :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} T_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{i\in I} a_i \tag{3.3}$$

Démonstration hors programme.

□

Exercice 40 *premiers exemples* On note $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{0\}$...

1. La famille $\left(\dfrac{1}{1+j^2}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ est elle sommable ?
2. La famille $\left(\dfrac{1}{i^2\, j^2}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}'^2}$ est elle sommable ? Calculer éventuellement sa somme.
3. La famille $\left(\dfrac{1}{i^2 + j^2}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}'^2}$ est elle sommable ?
Indication : encadrer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{a^2+n^2}$.
On donne : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{n^2+t^2}\, dt = \frac{2\pi}{n}$

3.3.2 Les familles sommables de complexes

Définition 7 *famille sommable de complexes*
Soient $\mathcal{J}$ un ensemble au plus dénombrable et $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille de **réels de signes quelconques ou de complexes** indexée sur $\mathcal{J}$. On dit que $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ est **sommable** ssi $(|a_i|)_{i\in\mathcal{J}}$ est **sommable.**

Rappelons les définitions et résultats vus en début de chapitre :

$u^+ = \max(u, 0) \geq 0$	$u^- = \max(-u, 0) \geq 0$
$u = u^+ - u^-$	$\lvert u \rvert = u^+ + u^-$
si $u \geq 0, u = u^+ \ et \ u^- = 0$	si $u \leq 0, u = -u^- \ et \ u^+ = 0$

Théorème 22
• Soient $\mathcal{J}$ un ensemble au plus dénombrable et $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille de **réels de signes quelconques** indexée sur $\mathcal{J}$. Alors $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ est **sommable** ssi les familles **de réels positifs** $(a_i^+)_{i\in\mathcal{J}}$ et $(a_i^-)_{i\in\mathcal{J}}$ sont toutes deux sommables.
• Soient $\mathcal{J}$ un ensemble au plus dénombrable et $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille de **complexes** indexée sur $\mathcal{J}$. Alors $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ est **sommable** ssi les familles **de réels positifs** $(Re(a_i))_{i\in\mathcal{J}}$ et $(Im(a_i))_{i\in\mathcal{J}}$ sont toutes deux sommables.

Démonstration
En tout point analogue à celle du théorème 3 sur les séries absolument convergentes.

□

Définition 8 *somme d'une famille sommable de complexes*
- Soit $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille sommable de **réels de signes quelconques** indexée sur $\mathcal{J}$, on définit sa somme comme étant

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} a_i = \sum_{i\in\mathcal{J}} a_i^+ - \sum_{i\in\mathcal{J}} a_i^-$$

- Pour $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ une famille sommable de **complexes** on définit sa somme comme étant

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} a_i = \sum_{i\in\mathcal{J}} Re(a_i) + i \sum_{i\in\mathcal{J}} Im(a_i)$$

• **Cas des familles indexées sur** $\mathbb{N}$
Nous avons là une généralisation de théorème 20.

Théorème 23 *familles sommables et séries à termes complexes :*
Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une **suite** de complexes (c'est à dire une **famille** de complexes, indexée sur $\mathbb{N}$).
La famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est **sommable** ssi la série $\sum a_i$ est **absolument convergente.**
Dans ce cas la somme de la série et la somme de la famille sommable coïncident :

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} a_i = \sup_{\substack{J\subset\mathcal{J} \\ J\ finie}} \sum_{i\in J} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Démonstration Nous avons démontré ce résultat pour les séries à termes positifs. Comme la sommabilité et la convergence absolue sont des propriétés de $(|a_i|)_{i\in\mathbb{N}}$, l'équivalence est donc aussi démontrée pour les familles de complexes.
Il reste à prouver que les sommes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, définie comme une limite, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, définie comme une combinaison linéaire de 4 bornes supérieures sont égales.
Cela ne pose pas de problème non plus, puisque le résultat est établi pour les familles à termes positifs et que pour les deux définitions de la somme les applications

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \to \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i, \text{ et } (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \to \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

sont linéaires alors que $a_i = Re(a_i)^+ - Re(a_i)^- + i\ (Im(a_i)^+ - Im(a_i)^-)$.

□

Théorème 24 *sommation par paquets, nombres complexes*
Si $(I_n)_n$ est une partition de l'ensemble dénombrable I, et si $(a_i)_{\in I}$ est une famille sommable de nombres complexes, alors :

1. Chacune des familles $(a_i)_{\in I_n}$ est sommable.
2. La famille $(T_n)_n$ où chaque T_n est défini par

   $$T_n = \sum_{i\in I_n} a_i$$

   est elle-même sommable.
3. L'égalité qui suit est vérifiée (formule de sommation par paquets) :

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} T_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{i\in I} a_i \qquad (3.4)$$

Démonstration hors programme.

□

3.3.3 Suites doubles

Théorème 25 *Fubini pour les suites doubles, réels positifs*
• Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$, une famille de réels positifs indexée sur $\mathbb{N}^2$.
$(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable ssi
– pour tout n, la série $\sum_m u_{n,m}$ est convergente ;
– la série des sommes $\sigma_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$ converge.
• Dans ce cas,

– Pour tout m, la série $\sum_n u_{n,m}$ est convergente ;
– La série des sommes $\tau_m = \sum_n u_{n,m}$ converge,
– Les sommes suivantes sont égales : $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m$. Ce qui s'exprime encore (formule de Fubini) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \right) \tag{3.5}$$

Démonstration
• Pour le premier point, nous avons deux implications à démontrer.
$\Rightarrow$ Supposons $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$, sommable. Observons que $\mathbb{N}^2$ admet pour partition la famille des ensembles $\{n\} \times \mathbb{N}$ (dessinez). Dans ce cas chaque somme $\sum_{\{n\}\times\mathbb{N}} u_{n,m}$ est définie puisque la famille est sommable et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\{n\}\times\mathbb{N}} u_{n,m} \right) = \sum_{\mathbb{N}^2} u_{n,m}$$

D'après ce que nous avons dit des familles indexées sur $\mathbb{N}$ (ici m parcourt $\mathbb{N}$),

$$\sum_{\{n\}\times\mathbb{N}} u_{n,m} \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} = \sigma_n.$$

Nous avons donc prouvé que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \sum_{\mathbb{N}^2} u_{n,m}$$

$\Leftarrow$ Supposons maintenant que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $\sum_m u_{n,m}$ converge et que la série des sommes $\sum \sigma_n$ converge elle aussi.
Considérons un ensemble fini $J \subset \mathbb{N}^2$ et un couple (N, M) tel que pour tout $(n, m) \in J$, $n \leq N$ et $m \leq M$. On a alors,

$$\sum_{(n,m)\in J} u_{n,m} \leq \sum_{(n,m)\in[0,N]\times[0,M]} u_{n,m} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} u_{n,m} \leq \sum_{n=0}^{N} \sigma_n$$

Comme cette dernière série converge

$$\sum_{(n,m)\in J} u_{n,m} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = cste$$

La famille est donc sommable.
• Si l'une des conditions équivalentes précédentes est remplie, comme la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, par symétrie des rôles du premier et deuxième terme de (n, m)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \sum_{\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m$$

$\square$

$\Rightarrow$ Une autre démonstration, plus délicate mais qui ne fait pas appel à un résultat admis (pour le fun) :

Supposons $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$, sommable.

– Notons $s_{n,M} = \sum_{m=0}^{M} u_{n,m}$. La suite $(s_{n,M})_M$ est croissante, et elle est aussi majorée puisque

$$s_{n,M} = \sum_{\{n\}\times[0,M]} u_{n,m} \leq \sum_{\mathbb{N}^2} u_{i,j}.$$

Ainsi $\sum_m u_{n,m}$ converge. On note alors comme dans l'énoncé : $\sigma_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$.

– Montrons que $\sum \sigma_n$ converge.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère M_n tel que la somme partielle s_{n,M_n} vérifie

$$0 \leq \sigma_n - s_{n,M_n} = \sum_{m=M_n+1}^{\infty} u_{n,m} \leq \frac{1}{2^n}.$$

On aura alors

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N} \sigma_n - s_{n,M_n} & \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \leq 2 \\ \sum_{n=0}^{N} \sigma_n & \leq \sum_{n=0}^{N} s_{n,M_n} + 2 \\ \sum_{n=0}^{N} \sigma_n & \leq \sum_{(n,m)\in\cup_{n=0}^{N}\{n\}\times[0,M_n]} u_{n,m} + 2 \end{cases}$$

Comme le dernier ensemble de sommation est fini, $\sum \sigma_n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées (par quelle constante ?). Elle converge donc.

$\square$

Théorème 26 *Fubini pour les suites doubles*
On considère une suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$, telle que
– Pour tout n, la série $\sum_m u_{n,m}$ est absolument convergente,
– La série des sommes $\sigma_n = \sum_m |u_{n,m}|$ converge.
Alors,
– Pour tout m, la série $\sum_n u_{n,m}$ est absolument convergente ;
– La série des sommes $\tau_m = \sum_n |u_{n,m}|$ converge,
– Les sommes suivantes sont égales :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}| \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}| \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}\right)$$

Démonstration non faite

Exercice 41 On note $\mathbb{N}'=\mathbb{N}\setminus\{0\}$...

1. La famille $\left(\dfrac{1}{i^2+j^2}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}'^2}$ est elle sommable ?

   Indication : encadrer la somme de la série $\sum\dfrac{1}{a^2+n^2}$...
2. La famille $\left(\dfrac{1}{i^2+j^3}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}'^2}$ est elle sommable ?

   Indication : encadrer la somme de la série $\sum\dfrac{1}{a^2+n^3}$...
3. La famille $\left(\dfrac{1}{i^4+j^4}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}'^2}$ est elle sommable ?
4. Pour quelles valeurs de $\alpha>0$ la famille $\left(\dfrac{1}{i^\alpha+j^2}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}'^2}$ est elle sommable ?

   On donne les résultats suivants :

$$\int_0^\infty\frac{1}{a^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2a}\tag{3.6}$$

$$\int_0^\infty\frac{1}{a^2+t^3}dt=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9a^{4/3}}\tag{3.7}$$

$$\int_0^\infty\frac{1}{a^\alpha+t^4}dt=\frac{\pi\sqrt{2}}{4a^{3\alpha/4}}\tag{3.8}$$

Exercice 42

1. Les sommes
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right),\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right),$$
   sont elles définies ?
2. Les sommes
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m^2)^\alpha}\right),\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m^2)^\alpha}\right),$$
   sont elles définies ? Sont elles égales ?
3. Que penser de
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+2m)^\alpha}\right),\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+2m)^\alpha}\right),$$
   lorsque $0<\alpha\leq 1$, lorsque $\alpha>2$?

Exercice 43 *sommes d'Euler*

On définit la fonction ζ de Riemann en posant pour $p > 1$, $\zeta(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

On admettra que $\zeta(2) = \pi^2/6$. (ce résultat est établi dans l'exercice 13).

1. Soit
$$\phi(m,n) = \frac{2}{m^3 n} + \frac{1}{m^2 n^2} + \frac{2}{mn^3}.$$
   - Calculer $u_{n,m} = \phi(m,n) - \phi(n, m+n) - \phi(m+n, m)$
   - En déduire que $\zeta(4) = \frac{2}{5}\zeta(2)^2$. *Dessiner les couples d'indices figurant dans la somme*
$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{n,m}\cdots$$
2. Que peut on faire d'analogue avec
$$\phi_k(m,n) = \frac{2}{m^{k-1}n} + \sum_{i=2}^{k-2} \frac{1}{m^{k-i}n^i} + \frac{2}{mn^{k-1}}?$$

Exercice 44 *d'après le problème Mines 2002 sur les nombres premiers...*

1. Montrer que la suite des nombres premiers est illimitée en considérant, par exemple, pour n nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_n$ donnés, l'entier Q_n défini à partir de ces n nombres premiers par la relation : $Q_n = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$.
2. Soient s un réel strictement positif et $n \geq 2$ un entier. Justifier que
$$\left(1 - \frac{1}{n^s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{ks}}.$$
3. Soient a et b deux entiers, différents l'un de l'autre, tous les deux supérieurs ou égaux à 2. Démontrer que la série double de terme général $u_{i,j}$ défini par la relation
$$u_{i,j} = \frac{1}{a^{i\,s} b^{j\,s}},$$
   est *sommable* (ce qui signifie que les séries $\sum_i u_{i,j}$, $\sum_j u_{i,j}$, sont absolument convergentes de même que les séries $\sum_j \sum_{i=0}^{\infty} |u_{i,j}|$, $\sum_i \sum_{j=0}^{\infty} |u_{i,j}|$). Déterminer sa somme S.

3.4 Produit de Cauchy de séries absolument convergentes

Calcul préliminaire :
Soient $P(X) = \sum a_k X^k$, et $Q(X) = \sum b_k X^k$, deux polynômes, écrire leur produit.

Définition 9 *produit de Cauchy de deux séries*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries, la série de **terme général**

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n}^{n} u_p v_q.$$

Théorème 27
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy est une série absolument convergente et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n}^{n} u_p v_q \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right).$$

Démonstration
On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes et on pose $w_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$.

1. Montrer que la famille $(u_p\, v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}}$ est sommable.
2. Justifier l'égalité
$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n}^{n} u_p v_q \right) = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_k v_\ell$$
3. En déduire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right).$$

□

Exercice 45 *séries semi-convergentes*

1. Que dire du produit de Cauchy de la série de t.g. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même ?
2. Que dire du produit de la série de t.g. $\dfrac{(-1)^n}{n}$ par elle-même ?

Exercice 46 *dénombrements*
Soit, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1. Écrire $f(x)$ comme la somme d'une série absolument convergente.

2. Écrire $f^2(x)$, $f^3(x)$ comme sommes de séries absolument convergentes.
3. On note $d_n^{(m)}$ le nombre de m-uplets d'entiers naturels $(p_1, p_2, ..., p_m)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = n.$$

Montrer que

$$f(x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(m)} x^k.$$

Exercice 47 *produits de Cauchy, produits infinis et nombres premiers*

1. Soit $p \geq 2$ un entier. Que vaut la somme

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{p^s}?$$

2. Déterminer le produit de Cauchy des séries géométriques $\sum \frac{1}{2^p}$ et $\sum \frac{1}{3^p}$.
3. Donner une expression judicieuse de $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)}$ sous forme de série.

On note T_n la $n^{ième}$ somme partielle de cette série. Développer T_2 et montrer que l'on a l'encadrement

$$H(6) \leq T_2 \leq H(25)$$

dans lequel $H(n)$ désigne la somme partielle de la série harmonique $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. On note $(p_n)_n$ la suite des nombres premiers (ainsi $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_8 = 19$ etc...). On définit une suite $(\mathcal{P}_n)_n$ en posant

$$\mathcal{P}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}.$$

   (a) Montrer que

$$\mathcal{P}_n = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_{n,m} \text{ où } \theta_{n,m} = \sum_{(\alpha_1+...+\alpha_n)=m} \frac{1}{2^{\alpha_1}}\frac{1}{3^{\alpha_2}}...\frac{1}{p_n^{\alpha_n}}.$$

   (b) On considère la somme partielle $\mathcal{P}_{n,N} = \sum_{m=0}^{N} \theta_{n,m}$. Montrer que $\mathcal{P}_{n,N} \leq H(p_n^N)$.

   (c) Soit K un entier compris entre 1 et $\min(2^N, p_n)$. On suppose que K se décompose en $K = 2^{a_1}3^{a_2}...p_j^{a_j}$.

   Justifier que tout nombre premier p_i figurant dans cette décomposition avec $a_i > 0$ est inférieur à p_n et que $a_1 + a_2 + ... + a_j \leq N$.

(d) Démontrer que pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$, il existe un entier q, que vous déterminerez, tel que $H(q) \leq \mathcal{P}_{n,N}$. En déduire que $H(q) \leq \mathcal{P}_n$ puis que $\lim \mathcal{P}_n = +\infty$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.
6. Montrer que la série $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge.

3.5 L'exponentielle complexe

Exercice 48 *exercice préliminaire*

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ la suite $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ converge.
2. Lorsque x est réel, que dire de sa limite ?
3. Montrer que $\cos x$ et $\sin x$ sont sommes de séries analogues et que, pour tout réel y, on a $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Définition 10
Pour tout z complexe, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. On définit donc une fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, en posant pour z complexe :

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette fonction, appelée **exponentielle complexe** vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 28
– L'application exp ci-dessus définie vérifie

$$\boxed{\exp(u + v) = e^{u+v} = e^u e^v = \exp(u)\exp(v)} \tag{3.9}$$

– $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$.
– Pour tout $z = x + iy$ avec x et y réels,

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)} \tag{3.10}$$

– exp est un **prolongement** de la fonction exponentielle réelle à $\mathbb{C}$.
– exp est surjective, non injective. Son noyau (comme homomorphisme de groupe) est l'ensemble des complexes de la forme $2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration
pour établir la formule $e^{z+w} = e^z e^w$, étudier le produit de Cauchy des séries de sommes e^z et e^w. Le résultat est une conséquence du théorème 27.

Exercice 49

1. Résoudre l'équation $e^z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{C}$ est l'inconnue ; justifier que exp est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$. Quel est son noyau ?
2. On note $L = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que si $w = a + ib = re^{i\theta}$ alors
$$\begin{cases} r & = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta & = 2\text{arctan}\left(\dfrac{b}{a+r}\right) [2\pi] \end{cases}$$
3. On suppose que $a + ib \in L$ (ie : n'est pas un réel négatif), exprimer les solutions de $e^z = a + ib$ à l'aide des fonctions ln et arctan (et d'un paramètre $k \in \mathbb{Z}$). Justifier que exp réalise une bijection de la bande $\{z \in \mathbb{C}; |Imz| < \pi\}$ sur L et expliciter sa bijection réciproque (appelée détermination principale de $\ln$ complexe).

4 Annexes

4.1 Annexe 1 : Pour étudier une série numérique...

1. On commence par s'assurer qu'elle n'est pas **grossièrement divergente,**
2. Si ce n'est pas le cas (et parfois aussi, si c'est le cas et que l'on veut étudier le comportement asymptotique des sommes partielles) on regarde ce que donnent les théorèmes du cours :
   (a) **pour une série à termes positifs ou de même signe :** comparaison à une série de référence, à une intégrale, règle de d'Alembert si son allure s'y prête...
   (b) **si la série est alternée,** vérifier les 3 hypothèses du critère spécial ;
   (c) **regarder les modules,** ce peut-être une série **absolument convergente,** c'est le cas des séries en $O(v_n)$ où $\sum v_n$ est une série positive convergente...
   (d) regarder si elle est de la forme $\sum f(n)$ où la fonction f est monotone ou de dérivée intégrable...
3. **Si ces critères ne sont pas immédiats,** penser à développer le terme général. On pourra alors étudier la série comme une sommes de séries au comportement facile à étudier... A cet égard réfléchir aux exemples suivants :
   – si $u_n = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, la série diverge. Pourquoi ?
   – si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, la série peut être convergente ou divergente ; illustrer les deux cas.
   – si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + \dfrac{1}{n^{3/2}} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la série converge. Pourquoi ?
4. On n'oubliera pas non plus la formule de Taylor etc..
5. **On pensera ensuite aux séries de fonctions :** série entières (séries géométriques dérivées par exemple), séries de Fourier en un point ($\sum \dfrac{\sin n}{n}$, par exemple), séries d'intégrales (voir chapitre correspondants)

4.2 Annexe 2 : Produits infinis

Exercice 50 *CCP (remanié)*
Soient $(u_n)_n$ une suite à termes strictement positifs.

1. Comparez les convergences des séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1 + u_n)$;
2. Comparez les convergences des séries $\sum u_n$ et du produit $\prod(1 + u_n)$;
3. Comparez les convergences des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où

$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=0}^{n}(1 + u_k)};$$

Exercice 51
Soit $(u_n)_n$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$ et telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k - u_{k+1}}{u_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

4.3 Annexe 3 : Calcul approché de la constante d'Euler

On a démontré que

1. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(\frac{1}{n})$
2. les suites $(a_n)_n$ et $b_n)_n$ définies par $a_n = H_n - \ln(n)$ et $b_n = H_n - \ln(n+1)$ sont adjacentes, de limite γ
3. l'écart $a_p - b_p$ est majoré par $\frac{1}{p}$.

Donc, pour obtenir un encadrement de γ de longueur 10^{-n}, il suffit de calculer les termes d'ordre 10^n de ces deux suites :

```
restart;
Digits:=20;
G:=proc(n)
local p, H, k;
 p:=10^n;
 H:=0;
 for k from 1 to p do
   H:=evalf(H+1/k):
 od;
[evalf(H-ln(p+1)), evalf(H-ln(p))];
end:

 t0:=time():  G(2);  time()-t0;

           [.5722570007983608096, .5822073316515288925]
                                  .009

t0:=time(): G(3); time()-t0;

           [.5767160812351243275, .5777155815682078606]
                                  .045

t0:=time(): G(5); time()-t0;

            [.577210664943199177, .577220664893199510]
                                 4.252

t0:=time(): G(6); time()-t0;

            [.577215164901949699, .577216164901449699]
                                 45.219
```

Remarque : On voit que pour passer d' une précision 10^{-n} à une précision $10^{-(n+1)}$, ce qui fait gagner une décimale, le temps de calcul est multiplié par 10 au moins, ce qui était tout à fait

prévisible.
Pour calculer de cette façon 20 décimales, il faut prévoir 140 millions de siècles.

4.4 Annexe 4. Développements asymptotiques et études de séries

Exercice 52
Soit f définie sur $[0, A, [$, continue, telle que $0 < f(x) < x$ sur $]0, \ A[$ et que

$$f(x) = x - ax^2 + bx^3 + o(x^3)$$

avec $a > 0$ et $b \neq a^2$. On souhaite donner un DA du terme général d'une suite définie par $u_0 \in [0, A[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Limite de la suite ?
2. Donner un équivalent de $\dfrac{1}{u_n}$.
   Indication : pour une suite quelconque,
   $$v_n = v_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)\,.$$
3. Donner un équivalent de $\dfrac{1}{u_n} - an$.
4. Donner un DA à 3 termes de u_n.

Exercice 53 *DA*
On considère une suite $(x_n)_n$ telle que $x_0 > 1$ et $x_{n+1} = x_n + 1 + \dfrac{1}{x_n - 1}$.

1. Montrer que cette suite et bien définie et déterminer sa limite.
2. Donner un équivalent de x_n.
   Indication : on écrira $x_n = \sum \sigma_k$, $\sigma_0 = x_0$ et $\sigma_k = (x_k - x_{k-1}), \ k \geq 1$.
3. Donner un développement à deux termes de x_n.

Exercice 54

1. Soit σ_n une suite de réels positifs telle que $\sigma_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3}$. Donner un équivalent des sommes $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k$.

   On considère pour $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = \sin u_n$.
2. Discuter du signe des termes de la suite selon u_1. Montrer que cette suite converge. Préciser sa limite.
   Justifier que si $u_1 \neq 0$, aucun des termes de la suite n'est nul. On se place dorénavant dans ce cas.

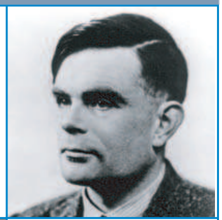
3. Donner un équivalent de $\sigma_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas $u_1 = 1$ et $u_1 = -1$.
4. Donner un équivalent de $\sigma_n - \dfrac{1}{3}$. En déduire un développement à deux termes de u_n.

voir corrigé en page **??**.

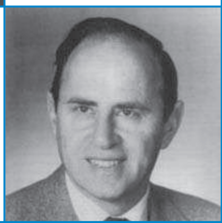
4.5 Annexe 5 : culture

- L'idée sous-jacente à l'exercice 38 (procédé diagonal), qui permet de démontrer par l'absurde que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable est à retenir ; c'est le point crucial dans la preuve de la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$.
- **Le premier théorème de Gödel (1931)** : ce théorème établit que dans une théorie mathématique qui par exemple contient les axiomes de l'arithmétique, il existe des énoncés P tels que ni P ni non(P) ne sont démontrables (on parle d'énoncés **indécidables** dans la théorie). Idée : numéroter les démonstrations possibles en fonction de l'énoncé P (lui-même numéroté) et en déduire des énoncés P tels que ni la démonstration de P ni celle de non(P) ne sont dans cette liste. Cela ne fournit pas pour autant un tel énoncé P en langage mathématique clair, il faudra attendre 1962 pour cela.
- **L'hypothèse du continu :** on sait que sont dénombrables les ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$ alors les ensembles en bijection avec $\mathbb{R}$ ne le sont pas. Existe-t-il des ensembles X tels que $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ qui ne seraient en bijection ni avec $\mathbb{N}$, ni avec $\mathbb{R}$? Cela nous ferait 3 types d'ensembles infinis contenus dans $\mathbb{R}$.
  En 1962, Paul Cohen prouve que cet énoncé est **indécidable**. On peut donc construire des théories mathématiquement cohérentes (sans contradiction) avec ou sans cette hypothèse. On travaille le plus souvent en acceptant comme axiome le fait qu'il n'existe pas de cardinal compris entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ que l'on note $\aleph_0$ et $\aleph_1$...
- L'indécidabilité en informatique : ...

1. Petite histoire de l'indécidabilité



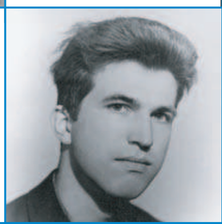
David Hilbert rêvait de trouver un système complet d'axiomes dont on pourrait établir de manière simple qu'il était non contradictoire et qui permettrait de développer toutes les mathématiques.



Kurt Gödel démontre en 1931 que tout système assez puissant pour faire des mathématiques intéressantes et non contradictoires est incomplet : certaines affirmations mathématiques vraies n'y sont pas démontrables.

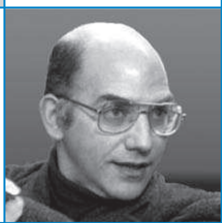
Alan Turing, grâce à son travail sur la notion d'algorithmes, permet de mieux comprendre le théorème d'incomplétude et de réaliser qu'il concerne un grand nombre de problèmes de programmation (et donc d'informatique).

Paul Cohen démontre l'indépendance de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu au sein de la puissante théorie des ensembles : l'indécidabilité concerne donc cette théorie centrale des mathématiques.



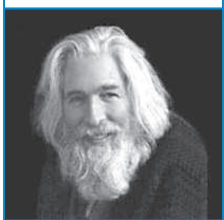
Andrei Kolmogorov propose une définition mathématique de la notion de complexité qui s'applique en physique et qui est donc touchée par l'indécidabilité : celle-ci est importante, y compris dans les sciences de la nature.

Per Martin-Löf, en formulant une définition rigoureuse de la notion de suite aléatoire infinie, permet une compréhension approfondie des liens entre probabilités et indécidabilité.



Yuri Matyasevich, en montrant l'indécidabilité du dixième problème de Hilbert concernant les équations polynomiales diophantiennes, permet la formulation d'équations arithmétiques – complexes – indécidables.

Jeff Paris et Leo Harrington ont formulé un énoncé d'arithmétique ne provenant pas de la logique et indécidable dans l'arithmétique élémentaire : ainsi, l'indécidabilité touche les parties les plus basiques des mathématiques.



Gregory Chaitin, en définissant le nombre Omega – dont une théorie mathématique ne peut connaître qu'un nombre fini de chiffres –, produit un concentré d'indécidabilité déconcertant.

Robert Solovay aggrave encore le résultat de G. Chaitin en produisant une variante du nombre Oméga dont *aucun* chiffre n'est connaissable par l'utilisation de la théorie usuelle des ensembles.

Raymond Smullyan tire des principes de la démonstration de Gödel un ensemble de problèmes paradoxaux qui en aident la compréhension et contribuent à populariser le résultat et sa démonstration.

Leonid Levin établit, entre autres, que l'utilisation du hasard dans les démonstrations ne permettra pas de contourner l'indécidabilité et conjecture qu'il en va de même de tout mécanisme physique.

Cristian Calude établit diverses formes fortes du théorème de Gödel qui en éclairent la nature et qui signifient que presque tout énoncé est indécidable.

5 Résumons nous

5.1 Généralités

Définitions

– Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite d'éléments de $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **série de terme général** u_n, la suite définie par
$$S_n=\sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$
– On dit aussi que la suite $(S_n)_n$ est la **suite des sommes partielles de la série ;**
– On dit que **la série de terme général** u_n **converge,** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_n$, converge. Sa limite notée
$$S=\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k,$$
est la somme de la série.
– Dans le cas contraire, **la série est dite divergente.**
– On dit que deux séries sont **de même nature** si elles sont simultanément convergentes ou divergentes.
– lorsque la série de terme général $(u_k)_{k\geq k_0}$ converge et a pour somme
$$S=\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k,$$
on définit pour $n\geq k_0$, son **reste** à l'ordre n comme la différence
$$R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Proposition

• La série numérique de terme général $(u_n)_n$ est convergente ssi pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n\geq N$ et tout $p\in\mathbb{N}^+$, $|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k|\leq\varepsilon$.
• Pour qu'une série converge, il faut que son terme général ait pour limite 0.
• Cette condition n'est en rien suffisante. Lorsqu'elle n'est pas remplie, on dit que la série est **grossièrement divergente.**
• On dit qu'une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série des modules est convergente et toute série numérique absolument convergente est également convergente. De plus
$$|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k|\leq\sum_{k=n}^{+\infty}|u_k|.$$

Théorème 29 critère des séries alternées

Soit $\sum u_k$ une série alternée, telle que, de plus,
– $(|u_n|)_n$ est une suite décroissante

– $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,
alors
– la série $\sum u_k$ est convergente
– les suites S_{2n} et S_{2n+1} des sommes partielles d'ordres $2n$ et $2n+1$ sont adjacentes et encadrent la somme de la série $\sum u_k$
– le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}$ vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

5.2 Séries à termes positifs

Proposition *n° dans le résumé* **1** *un inventaire des règles à connaître*

1. Soit $\sum u_n$ une série à **termes positifs.** Pour que $\sum u_n$ converge il suffit que la suite de ses sommes partielles soit bornée.
2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
   – si $(0 \leq) u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang,
   – si $\sum v_n$ converge,
   alors $\sum u_n$ converge également.
3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
   – si $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$
   – si $\sum v_n$ converge,
   alors, $\sum u_n$ converge également et de plus, les restes des deux séries sont comparables :
   $$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right).$$
4. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ alors, les deux séries sont de même nature.
   – si elles convergent leurs restes sont équivalents :
   $$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$
   – si elles divergent leurs sommes partielles sont équivalentes :
   $$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

Proposition *n° dans le résumé* **2** *Règle de d'Alembert. Ne pas croire au père Noël, ça marche dans des cas très très particuliers !*
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$ admet une limite. Alors :

– si cette limite vérifie $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $\sum u_n$ converge ;
– si cette limite vérifie $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $\sum u_n$ diverge ;
– une remarque hors thm : si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on se gardera de conclure trop vite.

5.3 Produit de Cauchy

Définition produit de deux séries
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries, la série de **terme général**

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n}^{n} u_p v_q.$$

Théorème -n° *dans le résumé:* **3** Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy est une série absolument convergente et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n}^{n} u_p v_q \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right).$$

5.4 Séries et intégrales

Théorème -n° *dans le résumé:* **4** Soit f une fonction positive continue par morceaux, décroissante sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$, alors :

– pour tous m, n tels que $n \geq m \geq n_0$,

$$\int_m^{n+1} f(t)\ dt \leq \sum_{p=m}^{n} f(p) \leq \int_{m-1}^{n} f(t)\ dt;$$

– La série de terme général $u_n = f(n)$, converge ssi la fonction

$$x \to \int_{n_0}^{x} f(t)\, dt$$

admet une limite en $+\infty$.

– Si la série converge, alors

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \ \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} f(p) \leqslant \ \int_{n}^{\infty} f(t)dt$$

– Si la série diverge, alors

$$\sum_{p=n_0}^{n} f(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

5.5 A connaître (liste provisoire) :

$\sum_{n\geq 1} q^n = \frac{1}{1-q}(\lvert q\rvert < 1)$ *géométrique*	$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ *Stirling*
$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ $converge \Leftrightarrow \alpha > 1$	$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $converge \Leftrightarrow \alpha > 0$
$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$ $(\gamma\ cste\ d'Euler)$	$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$
$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$	$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$ $si\ \lvert x\rvert < 1$
$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x$	$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

6 Tac au Tac

1. Quels sont les énoncé vrais ? Donner un contre-exemple s'ils sont faux.
   (a) si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors la suite $(u_n)_n$ converge ;
   (b) si pour tout p, $\lim_n(u_{n+p} - u_n) = 0$, alors $(u_n)_n$ converge ;
2. Quelle sont les limites des suites $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n^2}\right)^n$, $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n^{1/2}}\right)^n$?
3. Quelle est nature de la série $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$? de la série $\sum_n \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$?
4. Quels sont les énoncés vrais :
   (a) il est équivalent de dire $u_n = o((-1)^n/n)$ ou $u_n = o(1/n)$
   (b) si $u_n = o(1/n)$ alors $\sum u_n$ converge ;
   (c) si $u_n \sim o(1/n)$ alors $\sum u_n$ diverge ;
   (d) si $u_n \sim o((-1)^n/n)$ alors $\sum u_n$ converge ;
   (e) si $u_n = o(1/n^2)$ alors $\sum u_n$ converge ;
   (f) si $u_n = o((-1)^n/n^2)$ alors $\sum u_n$ converge ;
   (g) Pour toute série numérique, si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$;
   (h) Pour toute série numérique, si $\lim u_n = 0$ alors $\sum u_n$ est convergente ;
   (i) si deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont des termes généraux équivalents (ie : $u_n \sim v_n$), elles sont de même nature ;
5. Réponses rapides :
   (a) si $u_n = \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$, la série diverge. Pourquoi ?
   (b) si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$, la série peut être convergente ou divergente ; illustrer les deux cas.
   (c) si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + \dfrac{1}{n^{3/2}} + O(\dfrac{1}{n^2})$, la série converge. Pourquoi ?
6. Vrai ou faux
   (a) Si la série à termes positifs, $\sum u_n$ converge, il en va de même pour $\sum u_n^2$?
   (b) Si la série à termes complexes, $\sum u_n$ converge, il en va de même pour $\sum u_n^2$?
   (c) Si les séries à termes réels $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent, il en va de même de $\sum u_n v_n$?
   (d) Si les séries à termes complexes $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ sont absolument convergentes, il en va de même de $\sum u_n v_n$?
7. Donner, si possible, un exemple
   (a) de série $\sum u_n$ divergente telle que $\lim u_n = 0$;
   (b) de série $\sum u_n$ convergente telle que $\sum |u_n|$ diverge ;
   (c) de série $\sum u_n$ de terme général équivalent à $v_n = 1/n$ et qui converge ;
8. Quels sont les énoncés vrais :

(a) Toute série numérique **absolument convergente** est convergente ;
(b) Toute série convergente est **absolument convergente** ;
(c) Toute série à valeur dans un espaces normé, **absolument convergente** est convergente ;
(d) Toute série à valeur dans un espaces normé de dimension finie, **absolument convergente** est convergente ;

9. Donner un contre-exemple pour les énoncés faux dans la liste ci-dessus ;
10. Qu'est-ce-qu'un produit de Cauchy ? Quels théorèmes pouvez vous citer ? Application ?

7 Du rab !

Exercice 55

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ ci-dessous. Lorsque $u_n = \sin(\pi\alpha^n)$, $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Introduire une suite bien choisie $(F_n)_n$ *telle que* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. *voir corrigé* **??**

Exercice 56

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n^\alpha}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En cas de divergence grossière on pourra s'intéresser à la **suite** $(u_n)_n$.

voir corrigé **??**

Exercice 57 *techniques de base...*
Étudier les séries suivantes :

1. $\sum \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$;
2. $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$;
3. $\sum \dfrac{1}{(n-2)n(n+2)}$ et calcul éventuel de la somme ;
4. $\sum e^{\left(\dfrac{-n^2}{n+1}\right)}$
5. Donner un équivalent simple de
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k+1}.$$

Exercice 58

1. Montrer que les deux séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes :
$$*\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$*\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{(n-1)!}$$
2. Étudier la convergence des séries :
$$\sum_n \ln\left(1 + \frac{1}{(n+\sqrt{n})^\alpha}\right),\ \sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right),\ \sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 59

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, telle que $f(0) = 1$ et $0 < f(x) < 1$ sur $]0, +\infty[$. On lui associe une suite $(u_n)_n$ telle que $u_0 > 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)u_n$.

1. Que dire de la limite de la suite $(u_n)_n$?
2. On suppose de plus f dérivable en 0 et telle que $f'(0) < 0$.
   (a) Étudier la série $\sum u_n^2$.
   On pourra étudier $\sum(u_{k+1} - u_k)$...
   (b) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
   On pourra étudier $\prod \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$...
3. Étudier la série $\sum u_n^3$ lorsque f est deux fois dérivable, $f'(0) = 0$ et $f"(0) < 0$.

voir corrigé **??**

Exercice 60 *il est court, mais il y a de quoi faire*

Soit $(z_n)_n$ une suite de complexes telle que $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|)$. Comparer les modules de deux termes successifs, en déduire la convergence.

voir corrigé **??**

Exercice 61

1. Pour les 3 séries suivantes, discuter de la convergence et préciser la somme :
$$\sum \frac{3^{n-2}}{n!},\ \sum \frac{1}{n(n+2)}\quad \sum r^n e^{in\theta},\ r > 0, \theta \in \mathbb{R}.$$
2. Pour les séries suivantes, discuter de la convergence :
$$\sum \frac{1}{n + \frac{1}{\sqrt{n}}},\ \sum \frac{(-1)^n}{n + \frac{10^7}{n}}$$
Penser que l'on peut donner un développement de $\dfrac{1}{n + \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$.
3. Montrer que pour $\alpha > \beta > 0$ et $p \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\ln^p n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\right).$$
Étudier la convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n + \ln n}$

Exercice 62

1. Soit σ_n une suite de réels positifs telle que $\sigma_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3}$. Donner un équivalent des sommes $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k$.

   On considère pour $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = \sin u_n$.

2. Discuter du signe des termes de la suite selon u_1. Montrer que cette suite converge. Préciser sa limite.
3. Justifier que si $u_1 \neq 0$, aucun des termes de la suite n'est nul. On se place dorénavant dans ce cas.
4. Donner un équivalent de $\sigma_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k$ puis de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ (distinguer les cas $u_1 = 1$ et $u_1 = -1$).
5. Donner un équivalent de $\sigma_n - \dfrac{1}{3}$. En déduire un développement à deux termes de u_n^2. On pourra utiliser une calculatrice.

Exercice 63

1. Pour chacune des trois séries suivantes, dire si elle converge, si elle est absolument convergente :
$$\sum \frac{(-1)^p}{2p+1}, \ \sum \frac{1}{(2p+1)(2p+3)}, \ \sum \frac{1}{(4p+1)(4p+3)}.$$
2. A l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)(2p+3)}.$$
3. Comparer les sommes
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(4p+1)(4p+3)} \text{ et } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$
4. On se propose de calculer ces sommes.
   (a) Soit $x \in R$. Montrer que
$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \, dt = \text{arctan} x + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, dt.$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$
5. On note
$$S_N = \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^p}{2p+1} \text{ et } R_N = \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$
   Donner une condition suffisante sur N pour que $|S_N - \frac{\pi}{4}| \leq 10^{-p}, \ p \in \mathbb{N}$. En déduire en encadrement de $\pi/4$ à 10^{-2} près. Donner précisément le programme qui vous a permis de l'obtenir sur votre calculette.
6. On note
$$T_N = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(4p+1)(4p+3)} \text{ et } R'_N = \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{1}{(4p+1)(4p+3)}.$$
   (a) Majorer le reste R'_N par le reste d'une série plus simple, puis par une (limite d')intégrale.
   (b) Donner une condition suffisante sur N pour que $|T_N - \frac{\pi}{8}| \leq 10^{-p}, \ p \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire en encadrement de $\pi/8$ à 10^{-2} près. Donner précisément le programme qui vous a permis de l'obtenir sur votre calculette.

Corrige en **??**, page **??**.

Exercice 64 *développements asymptotiques de séries*

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que ses sommes partielles :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$
   (a) Donner un encadrement de u_n par des intégrales lorsque $n \geq 2$. En déduire un équivalent de S_n lorsque n tend vers l'infini.

   (b) On pose, pour $n \geq 2$,
$$w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
      i. Écrire w_n comme une intégrale que l'on intégrera judicieusement par parties. Démontrer que la série de terme général w_n est absolument convergente. Donner un majorant de
$$W = \sum_{k=2}^{\infty} w_k.$$
      ii. Justifier qu'il existe une constante ℓ et une suite $(R_n)_n$ convergeant vers 0 telles que
$$S_n = 2\sqrt{n} + \ell + R_n.$$
      Déterminer un entier N_p au delà duquel
$$|S_n - 2\sqrt{n} - \ell| \leq 10^{-p}.$$
      iii. A l'aide de votre calculette donner une valeur approchée à 10^{-1} près de ℓ. Vous expliciterez avec soin votre code ou à défaut le code MAPLE correspondant (que vous ayez écrit une fonction ou une ligne de commande).

2. On considère ici la série de terme général $v_n = \sqrt{n}$ défini pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi que ses sommes partielles :
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$
   (a) Encadrer T_n à l'aide d'intégrales et en déduire un équivalent simple de T_n lorsque n tend vers l'infini.

   (b) Examiner la feuille de travail ci-jointe, produite par un code MAPLE équivalent à celui qui figure ci-dessous :

```
n:=50000:
s[0]:=0:
for k from 1 to n do
          s[k]:=evalf(s[k-1]+k^(1/2));
          t[k]:= evalf( (s[k]-2/3*k^(3/2)) /  k^(1/2));
od:
```

```
t[n-2],t[n-1],t[n];
```

```
                    0.4989080491, 0.4989075320, 0.4989249034
```

Dire si la conjecture $T_n - \dfrac{2}{3}n^{3/2} \sim_{n\to\infty} \sqrt{n}$ est plausible. Corriger éventuellement.

(c) En observant que

$$\frac{2}{3}n^{3/2} = \int_0^n \sqrt{t}\,dt,$$

Vérifier que

$$T_n - \frac{2}{3}n^{3/2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u}{k}}\right) du$$

(d) Donner un développement limité à l'ordre 3 de $(1+x)^{3/2}$. En déduire un développement asymptotique de l'expression :

$$\sqrt{k} \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u}{k}}\right) du$$

(e) En faisant appel à l'équivalent de S_n trouvé à la première question, montrer que

$$T_n = \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + C + r_n$$

où $\lim r_n = 0$.

corrigé en **??**