Révisions pour les oraux *
Classe de MP, lycée Cézanne.

19 mai 2017

Les corrigés ne figurent pas dans la version papier que je distribue en classe ; la version magnétique complète de ce polycopié est disponible sur les sites

`http://www.univenligne.fr`
`http://www.mpcezanne.fr` .

Vous pouvez donc, si vous vous lancez dans d'autres exercices que ceux que nous traiterons ensemble, espérer une correction. Comme toutes les réponses ne sont pas encore rédigées, je peux à la demande ajouter les corrigés dont vous auriez besoin.

Table des matières

1 Conseils généraux **4**

2 Algèbre générale **9**
2.1 Résumé de cours . . . 9
2.1.1 Groupes . . . 9
2.1.2 Anneaux et corps, généralités, notion d'idéal . . . 10
2.1.3 Compléments d'arithmétique, les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ . . . 11
2.1.4 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . 13
2.2 Exercices . . . 14

3 Déterminants et systèmes linéaires **22**
3.1 Résumé de cours sur la notion de déterminant . . . 22
3.1.1 Le groupe symétrique . . . 22
3.1.2 Formes n-linéaires alternées en dimension n. . . . 22
3.1.3 Les classiques . . . 25
3.1.4 Déterminants et géométrie, espaces euclidiens . . . 26
3.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire : . . . 26
3.3 Énoncés . . . 26

*Document disponible sur `mpcezanne.fr` ou `univenligne.fr` sous le nom `RevisionsMPOral2017.pdf`

4 Applications linéaires, calcul matriciel, réduction, polynômes d'endomorphismes 31
4.1 Résumé de cours : réduction des endomorphismes . . . 31
4.1.1 Valeurs propres, sous espaces propres . . . 31
4.1.2 Réduction des endomorphismes . . . 31
4.1.3 Polynômes d'endomorphismes . . . 32
4.1.4 Stabilité, lemme des noyaux . . . 33
4.1.5 Diagonalisation des endomorphismes symétriques . . . 33
4.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire : . . . 35
4.3 Énoncés . . . 37

5 Fonctions de la variable réelle, suites numériques 49
5.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire : . . . 49
5.2 Énoncés . . . 49
5.3 Inégalités de convexité . . . 51

6 Séries numériques 55
6.1 Résumé séries numériques . . . 55
6.1.1 Généralités . . . 55
6.1.2 Séries à termes positifs . . . 56
6.1.3 Séries et intégrales . . . 56
6.1.4 Critère de d'Alembert. . . . 58
6.1.5 Produit de Cauchy et exponentielle complexe . . . 59
6.1.6 Conseils pour étudier une série numérique... . . . 60
6.1.7 A connaître : . . . 60
6.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire : . . . 61
6.3 Énoncés . . . 61

7 Espaces normés et topologie 67
7.1 Résumé . . . 67
7.1.1 Généralités : limites, normes équivalents, topologie . . . 67
7.1.2 Fonctions continues . . . 68
7.1.3 Espaces vectoriels normés en dimension finie . . . 69
7.1.4 Les compacts . . . 70
7.2 Caractérisation des applications linéaires continues . . . 70
7.3 Ce qu'il faut connaître et savoir faire : . . . 71
7.4 Énoncés . . . 71

8 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens 75
8.1 Résumé de cours . . . 75
8.1.1 Endomorphismes symétriques . . . 77
8.1.2 Endomorphismes orthogonaux, groupe orthogonal . . . 78
8.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire : . . . 80
8.3 Énoncés . . . 80

9 Fonctions de plusieurs variables 85
9.1 Kit de survie . . . 85
9.2 Énoncés . . . 88
9.3 Continuité . . . 88
9.4 Recherche de minimum ou maximum : ce qu'il faut connaître et savoir faire : . . . 89
9.5 divers . . . 91

10 Séries de fonctions, séries entières **93**
10.1 Résumé convergence des suites et séries de fonctions 93
10.1.1 Convergence simple, convergence uniforme et convergence normale 93
10.1.2 Propriétés des limites uniformes, interversion des limites 95
10.1.3 Interversion des limites et de l'intégration 97
10.1.4 Dérivation de la limite 97
10.1.5 Séries entières et dérivation 99
10.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire : 101
10.3 Énoncés 102

11 Intégration **107**
11.1 Résumé : convergence des suites et séries d'intégrales 107
11.1.1 Suites d'intégrales 107
11.1.2 Intégrale dépendant d'un paramètre 108
11.1.3 La fonction Γ : 109
11.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire. 109
11.3 Énoncés 111

12 Equations différentielles **117**
12.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire : 117
12.2 Énoncés 118

13 Probabilités **121**
13.1 Résumé du cours 121
13.1.1 Espaces probabilisés 121
13.1.2 Probabilités conditionnelles, trois formules fondamentales 122
13.1.3 Variables aléatoires discrètes 123
13.1.4 Espérance, variance et écart-type 125
13.1.5 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible... 127
13.1.6 Fonctions génératrices 128
13.1.7 Lois usuelles, le résumé du résumé 128
13.2 Exercices 130

14 Corrigés **134**
14.1 Indications ou corrigés des exercices d'Algèbre 134
14.2 Indications ou corrigés des exercices, déterminants et systèmes 157
14.3 Indications ou corrigés des exercices, réduction et polynômes d'endomorphismes . . 165
14.4 Indications ou corrigés des exercices, fonctions de la variable réelles, suites numériques 197
14.5 Indications ou corrigés des exercices, séries numériques 205
14.6 Indications ou corrigés des exercices, espaces normés et topologie 215
14.7 Indications ou corrigés des exercices, espaces préhilbertiens 225
14.8 Indications ou corrigés des exercices, fonctions de plusieurs variables 229
14.9 Indications ou corrigés des exercices, séries de fonctions 233
14.10 Indications ou corrigés des exercices, intégration 239
14.11 Indications ou corrigés des exercices, équations et systèmes différentiels 251
14.12 Indications ou corrigés des exercices de probabilités 255

1 Conseils généraux

Lire avant tout : les rapports d'oraux...

Ci-dessous quelques extraits du rapport CCP 2015

Remarques importantes :

- les calculatrices sont interdites pendant toute la durée de l'épreuve CCP [1] ;
- le candidat pourra commencer sa présentation orale par l'exercice de son choix mais sera interrogé sur les deux exercices ;
- les questions de cours sont fréquentes dans la banque.

Consignes, conseils et critères d'évaluation :

- tout théorème utilisé ne figurant pas explicitement au programme sera énoncé correctement et démontré.
- **sur une question non traitée, ne pas hésiter à faire part de sa démarche à l'examinateur même si elle n'a pas abouti**.
- Sont pris en compte dans l'évaluation les critères suivants :
  - la maîtrise des **définitions et théorèmes du programme,**
  - les capacités techniques et calculatoires,
  - les prises d'**initiative** durant l'épreuve et le degré d'**autonomie**,
  - la pertinence de la réflexion,
  - la justesse et la clarté des réponses,
  - la rigueur du raisonnement,
  - la **qualité de la prestation orale** et la bonne utilisation du **vocabulaire mathématique**.

Remarques sur les exercices de la banque pour la session 2015

Globalement, les candidats semblent avoir travaillé davantage les exercices de la banque. Cela dit, ils ne les ont pas toujours travaillés en profondeur : manque de rigueur fréquent dans les questions de cours, imprécisions, oublis de cas particuliers... Et si on creuse un peu dans le domaine de l'exercice proposé, on a souvent de mauvaises surprises. Les candidats restent faibles, comme les années précédentes, dans les domaines suivants : topologie (même si les exercices proposés sont basiques), fonctions à plusieurs variables et dans une moindre mesure, équations différentielles. Ce constat est regrettable car les exercices de la banque devraient constituer un support essentiel de révision et de réflexion pour le candidat et l'occasion de s'assurer qu'il maîtrise bien les concepts sous-jacents à l'exercice. Par contre, les exercices de probabilités ont été, globalement, bien préparés. Pour la session 2015, la moyenne des exercices de la banque (notés sur 8 points) est de 5,51 (ce qui correspondrait, ramené à 20, à une moyenne de 13,8) et l'écart-type est de 2,05.

1. Mais autorisées à Centrale.

Un exemple d'exercice commenté du point de vue de l'Oral

- **Objet d'étude** : suite définie par une intégrale.
- **Connaissances mises en œuvre** :
  - calcul intégral basique ;
  - étude des suites numériques ;
  - relations de comparaison ;

  Remarque : on peut faire cet exercice avec le cours de première année ; mais il y a possibilité d'explorer du coté des séries, des suites d'intégrales.
- **Compétences** : (ce que cherche à évaluer un examinateur qui pose l'exercice)
  - savoir mobiliser des techniques et méthodes basiques venant de plusieurs chapitres ;
  - reconnaître la proximité avec des problèmes déjà rencontrés (à vous de jouer) et adapter les méthodes qui ont permis de les résoudre (dernière question).
- **Niveau :** CCP et CCP+ pour la dernière question

Exercice 1.1 On considère la suite $(I_n)_n$ des intégrales définies par : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$.

1. Calculer I_1.
2. Justifier que cette suite converge.
3. Calculer $I_{n+2} + I_n$.
4. Déterminer la limite de $(I_n)_i$.
5. Donner un équivalent de I_n en $+\infty$.

Un deuxième exemple d'exercice commenté du point de vue de l'Oral

- **Objet d'étude** : la diagonalisabilité d'une matrice dépendant d'un paramètre
- **Connaissances mises en œuvre** :
  - calcul de déterminant ;
  - calcul algébrique et organisation des calculs ;
  - les cours sur la réduction ;
- **Compétences** : (ce que cherche à évaluer un examinateur qui pose l'exercice)
  - savoir maîtriser calculs algébriques ;
  - raisonner par condition suffisante pour élaguer (feeling) ;
  - savoir mener une étude de cas (rigueur organisation).
- **Niveau :** c'est un exercice mines 2015, mais il y des exercices ressemblants en CCP au chapitre

Exercice 1.2 Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère la matrice

$$M_z = \begin{bmatrix} z & z & z \\ 1 & z & z \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de z est elle diagonalisable ?

Corrigé du premier exercice et commentaires a posteriori

---

1. Je remarque que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est de la forme $-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Je calcule et trouve $\boxed{I_1 = \dfrac{\ln 2}{2}.}$
2. – je pense au cours de deuxième année sur les suites d'intégrales (et on plie alors aussi la question 4)
   – ça ressemble aussi à des exercices de sup (Wallis et quelques autres) et on ne connaissait pas le chapitre sur les suites d'intégrales...
   – si j'ai les deux idées, j'en fais rapidement part à l'examinateur...

   Dans le premier cas on fait intervenir le théorème de convergence dominée. On précise toutes les hypothèses ; pour la **domination** il suffit d'observer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [0, \pi/2]$ $|\tan^n x \leq 1$ qui est **intégrable** sur le segment...
   Dans le second cas, je fais comme en MPSI : la suite est $\searrow$ et minorée par 0...
3. $I_{n+2} + I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x(\tan^2 x + 1)\, dx$. On (le neurone de la chasse) reconnaît alors dans l'intégrale la forme $u'(x)\, u^(x)$ et on a $\boxed{I_{n+2} + I_n = \left[\dfrac{1}{n+1} \tan^{n+1} x\right]_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{n+1}.}$
4. Si on a pensé au TCD dans la question 2, le résultat est établi. Sinon comme la suite converge il vient en passant à la limite dans la formule encadrée dans la question 3 : $\ell + \ell = 0$...
5. Venons en au fait : on va procéder en pensant à écrire $I_{n+2} \leq I_{n+1}$
   $leqI_n$.
   Ajoutons alors I_n, il vient : $I_{n+2} + I_n \leq I_{n+1} + I_n \leq 2I_n$. Cela nous donne une minoration : $\dfrac{1}{n+1} \leq 2I_n$.
   On voudrait aussi majorer tant qu'à faire. On va donc ajouter I_n cette fois : $2I_{n+2} \leq I_{n+1} + I_{n+2} \leq In + 2 + I_n$. Cela donne $2I_{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   $\boxed{\text{En réindexant : } \dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}...}$
   On a alors $\lim nI_n = 1$ et $I_n \sim \dfrac{1}{n}$.

• **Que faut il mobiliser pour avancer et que faut il retenir quand on l'aura fait ?**
Au premier coup d'œil, je pense calculs d'intégrales (sur un segment), suite d'intégrales, intégrales de Wallis...
Pour la question 1 : réflexes de base ; cela suppose qu'on a travaillé et revu ses planches d'exos !
Pour la question 2 : deux façons de faire, les deux ont été vues et revues...
Pour la question 3 : calcul direct où je dois reconnaître une dérivée usuelle...
Pour la question 4 : c'est immédiat...
Pour la question 5 :
— ça fait penser à Wallis (si je n'y pense pas, je ne trouverai pas). On écrit alors trois termes successifs dans l'ordre, suis-je capable de voir la petite différence (addition plutôt que x) : avec les intégrales de Wallis on aurait écrit :

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n,$$

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_n}{I_n} = 1.$$

— Autres façons de voir : je peux aussi avoir l'idée de calculer $I_1, I_3, I_5, ...$ de conjecturer et vérifier sait on jamais ? je peux calculer $I_2, I_4, I_6 ...$ A défaut de trouver facilement un équivalent je peux retrouver des limites remarquables pour des séries alternées... ça donnera à l'examinateur l'idée pour une question 6.
— Attention, dans cette question on sera précis pour justifier l'équivalent (penser à écrire les quotients pour vérifier et ça ne déplaira pas à l'examinateur - lisez à ce propos le rapport du jury...).

2 Algèbre générale

2.1 Résumé de cours

2.1.1 Groupes

Définition 2.1 *rappel du vocabulaire de base*

groupe : Soit E un ensemble non vide et $\star$ une loi interne sur E. On dit que $(E, \star)$ est un groupe ssi
- la loi $\star$ est associative ;
- il existe $e \in E$ tel que $\forall x \in E$, $x \star e = e \star x = x$ (on dit que e est élément neutre pour $\star$)
- pour tout $x \in E$ il existe $x' \in E$ tel que $x \star x' = x' \star x = e$, (on dit que x' est inverse ou symétrique de x).

sous-groupe Soit $(E, \star)$ un groupe d'élément neutre e, on dit qu'une partie H de E est un sous groupe de $(E, \star)$ ssi
- H est non vide ;
- pour tout couple (x, y) d'éléments de H, $x \star y^{-1} \in H$.

ordre d'un groupe on appelle ordre d'un groupe fini, le nombre de ses éléments ;

partie génératrice on dit qu'une partie F d'un groupe G, est une partie génératrice de G', sous-groupe de G ssi G' est le plus petit sous-groupe contenant F;

groupe monogène c'est un groupe engendré par un de ses éléments

groupe cyclique c'est un groupe monogène fini (voir le théorème 2.2) ;

générateur a est générateur d'un groupe (nécessairement monogène ou cyclique) si $\{a\}$ est une partie génératrice de ce groupe ; l'ordre d'un élément de G est l'ordre du sous-groupe qu'il engendre ;

morphismes une application $f : (G, \star) \to (H, *)$ est un morphisms de groupe ssi pour tous $(a, b) \in G^2$ on a $f(a \star b) = f(a) * f(b)$;

noyau avec les mêmes notations, le noyau d'un morphisms f est le sous groupe de G formé des antécédents de l'unité de H;

isomorphisme c'est un morphisms bijectif ;

Théorème 2.1 *théorème de Lagrange*[2]
Soit G un groupe fini de cardinal n, H un sous-groupe de G. Alors, l'ordre de H est un diviseur de l'ordre de G.

Théorème 2.2 *groupes mongènes et cycliques*

1. Soit $(G, *)$, un groupe et $\omega \in G$. Le sous groupe de G engendré par ω est de la forme $\{w^q;\ q \in \mathbb{Z}\}$.
2. Lorsque le groupe monogène engendré par a est infini, les suites $(0, a, 2a, 3a, ...(n-1)a, ...)$ ou $(a^0 = e, a^1, a^2, ..., a^{n-1}e, , ...)$ ont des termes distincts et $G = \{a^q;\ q \in \mathbb{Z}\}$;
3. Tout sous-groupe cyclique d'ordre n, $(G, \star)$ est de la forme $\{\omega^0 = e, \omega^1, ...\omega^{n-1}\}$ et il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
4. en notation additive, le groupe cyclique engendré par a est de la forme $\{0, a, 2a, 3a, ...(n-1)a\}$ avec $na = 0$;

2. ce n'est pas au programme, mais je préfère que vous l'ayez vu

5. en notation multiplicative, le groupe cyclique engendré par a est de la forme $\{a^0 = e, a^1, a^2, ..., a^{n-1}e\}$, $a^n = e$;

Exemples :

— $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène, engendré par ± 1;

— $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe additif cyclique : ses éléments générateurs sont les classes des entiers premiers avec n;

— pour $n \in \mathbb{N}, n > 1$, le groupe des racines $n^{ièmes}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$ est un groupe pour la multiplication, cyclique, ses générateurs sont les racines primitives $e^{2ik\pi/n}$ où k est premier avec n;

2.1.2 Anneaux et corps, généralités, notion d'idéal

Définition 2.2 *anneaux commutatifs, corps et idéaux*

1. Un ensemble A muni de deux LCI notées $+$ et $\times$ est un **anneau** ssi
   — $(A, +)$ est un groupe commutatif ;
   — la loi $\times$ est distributive par rapport à $+$:
      — $(a + b) \times c = a \times c + b \times c,\ c \times (a + b) = c \times a + c \times b$;
      — A possède un élément neutre pour $\times$;

   On dit que A est un **anneau d'intégrité si,** de plus :
   $$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0;$$
2. On dit que l'anneau $(A, +, \times)$ est un **corps** ssi tout élément non nul de A est inversible (pour $\times$) (c'est alors un anneau d'intégrité) ;
3. Une partie non vide de $I \subset A$, est un **sous-anneau** si c'est un sous-groupe de $(A, +)$ qui est aussi stable pour la loi $\times$ et contient l'élément neutre.
4. Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \star)$ deux anneaux ; on dit qu'une application ϕ de A vers B est un **morphisme d'anneaux** lorsque
   — c'est un morphisme de groupes de $(A, +)$ vers $(B, +)$;
   — on a la formule : $\phi(a \times b) = \phi(a) \star \phi(b)$;
5. **produit de deux anneaux** $(A, +, \times)$ **et** $(B, +, \times)$, c'est l'anneau $(A \times B, +, \times)$ dont les opérations sont définies par
   $$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \text{ et } (a, b) \times (a', b') = (aa', bb');$$
6. Dans un anneau d'intégrité commutatif, on définit une relation de **divisibilité** en posant :
   $$a|b \Leftrightarrow \exists d \in A,\ b = da \Leftrightarrow bA \subset aA;$$

On observera sans peine que **l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau** $(A, +, \times)$ **forme un groupe multiplicatif (et qui se confond avec** $A\backslash\{0\}$ **ssi** A **est un corps !) ;** par exemple

— le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ est $\{-1, 1\}$;

— le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ est $\mathbb{K}^*$ (constantes non nulles) ;

— Voir aussi le théorème 2.13, pour ce qui est des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 2.3 *idéal*

Soit A un anneau de lois $+$ et $\times$. Un idéal de A est une partie $\mathcal{I}$, de A est un sous-groupe de $(A, +)$ tel que
$$\forall x \in A,\ \ \forall j \in \mathcal{I},\ \ x \times j \in \mathcal{I} \text{ et } j \times x \in \mathcal{I}.$$

2.1.3 Compléments d'arithmétique, les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$

• Division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{Z}$

Théorème 2.3
Pour tout couple d'entiers naturels (a, b) tel que $b > 0$, il existe un couple (q, r) et un seul vérifiant :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

• Division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$

Théorème 2.4
Soit $\mathbb{K}$ un corps. L'anneau des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un anneau d'intégrité, et pour tout couple $(A(X), B(X)) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X]/\{0\}$, il existe un unique couple $(Q(X), R(X))$, tel que

$$A(X) = Q(X)B(X)+R(X) \text{ et } degR(X) < deqB(X).$$

• Nombres premiers dans $\mathbb{Z}$

Théorème 2.5
Tout entier naturel $n > 1$ est d'une façon et d'une seule produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p}$$

où les α_p non nuls sont en nombre fini.

• Polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 2.4
$P \in \mathbb{K}[X]$ *est irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ *ssi*

$$P = QR \Rightarrow P \in \mathbb{K} ouR \in \mathbb{K}.$$

• Idéaux de $\mathbb{Z}$

Théorème 2.6
1. Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les parties $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$.
2. $a|b$ ssi $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$;
3. L'intersection des idéaux $a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$ est l'idéal $m\mathbb{Z}$ où m est le ppcm de a et de b;
4.Soient a et b deux entiers non nuls, l'idéal engendré par a et b est l'ensemble $\{au+bv;\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2\} = d\mathbb{Z}$ où $d = pgcd(a, b)$ est le plus grand diviseur commun de a et de b.

• Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Théorème 2.7
Dans $\mathbb{K}[X]$, tout idéal $\mathcal{I}$ est formé des multiples d'un polynôme $G(X)$. On dit que G est un générateur de $\mathcal{I}$. Il est unique à une constante multiplicative prés, ie :
$G(X) \times \mathbb{K}[X] = H(X) \times \mathbb{K}[X] \Rightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{K},\ G = \alpha H)$.

Notion de polynôme minimal (d'un endomorphisme)

Définition 2.5
Soit u un endomorphisme de E $\mathbb{K} - ev$. L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme minimal de u le polynôme générateur de cet idéal dont le coefficient de tête est égal à 1.

• **Entiers premiers entre eux**

Définition 2.6
Deux entiers sont premiers entre eux ssi leur pgcd est égal à 1.

Théorème 2.8 *théorème de Gauss*
Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors $a|\,b\,x \Rightarrow a|x$.

Théorème 2.9 *théorème de Bezout*
Soient a et b deux entiers non nuls. Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. a et b sont premiers entre eux,
2. l'idéal $\{au + bv;\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$ est égal à $\mathbb{Z}$,
3. il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = 1.$$

• **Polynômes premiers entre eux**

Définition 2.7 Deux polynômes A et B sont premiers entre eux ssi leurs seuls diviseurs communs sont les constantes non nulles.

Théorème 2.10 *théorème de Gauss*
Si A et B sont des polynômes premiers entre eux, alors pour tout polynôme C, $A|BC \Rightarrow A|C$.

Théorème 2.11 *théorème de Bezout*
Soient A et B deux polynômes. Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. A et B sont premiers entre eux,
2. l'idéal $\{AP + BQ;\ (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2\}$ est égal à $\mathbb{K}[X]$,
3. il existe deux polynômes P et Q tels que

$$AP + BQ = 1.$$

Application : la démonstration du lemme des noyaux...

2.1.4 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Théorème 2.12 *l'anneau* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes des éléments de $\mathbb{Z}$ modulo n. Il y a n classes qui sont celles des entiers 0,1,...,$n-1$.
2. On définit deux lois de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant :
   — $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$;
   — $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$;
3. L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication ainsi définies est un anneau commutatif ;
4. L'application $a \in \mathbb{Z} \to \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (morphisme canonique) est un morphisme d'anneau surjectif.

Théorème 2.13 *groupe des inversibles de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ forment un groupe (noté parfois $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$) ;
2. un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible ssi il est premier avec n;
3. un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible ssi c'est un élément générateur du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
4. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier ; dans ce cas, le groupe des inversibles est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

Définition 2.8 *indicatrice d'Euler*
On appelle indicatrice d'Euler l'application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\phi(n) = Card\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right).$$

C'est aussi le nombre des entiers $1 \leq p \leq n$, premiers avec n.

Théorème 2.14 *propriétés de l'indicatrice d'Euler*
— Si p est premier, $\phi(p) = p - 1$ et $\phi(p^s) = p^{s-1}(p-1)$;
— si m et n sont premiers entre eux, $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$;
— pour un naturel n dont la décomposition en facteurs premier est $n = \prod_i p_i^{s_i}$, on a

$$\phi(n) = n \prod_i (1 - 1/p_i).$$

2.2 Exercices

Ce que dit le rapport d'oral CCP 2007 à ce propos :
Les structures de groupes et surtout de sous-groupe sont parfois mal connues. Il en est de même des structures d'anneau et de corps.

Et en 2015 à propos de l'arithmétique :
La plupart des candidats semblent avoir fait l'impasse sur cette partie du programme.

Bien qu'il y ait assez peu d'algèbre générale aux CCP, ne pas négliger ce chapitre dans lequel les exercices proposés seront souvent assez simples. On verra dont impérativement les exercices d'application 2.1, 2.22, 2.23 et aussi l'exercice 2.30, les exercices classiques sur la factorisation et les polynômes (voir les exercices regroupés en 2.29.
Pour ce qui est des Mines et de Centrale, il faut s'attendre à en rencontrer beaucoup plus. La plupart des exercices de ce chapitre proviennent de ces concours.

Rappel
On rappelle les relations liant les racines d'un polynôme à ses coefficients : en notant

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \in \mathbb{K}[X]$$

est un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, alors

$$\begin{cases} \sigma_1 & = \sum_i \alpha_i & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \sigma_2 & = \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i \alpha_j & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_k & = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} & = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_n & = \alpha_1 \ldots \alpha_n & = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Relations à connaître par tous. Avoir vu quelques uns des exercices correspondants à la fin du chapitre d'Algèbre générale est impératif pour Mines Centrale...

Exercice 2.1 *CCP - 2006 (plusieurs planches)*

1. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des matrices $M(a,b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que c'est un sous-anneau et un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
   (b) S'agit il d'un corps ? On définit $f : \mathbb{C} \to \mathcal{F}$ en posant $f(a + ib) = M(a, b)$. Montrer que c'est un isomorphisme de corps.
2. **Un autre exercice CCP 2006 (PC)**
   On considère les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que :
   — $\det A = 1$;
   — il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_2$.

   (a) Montrer que pour une telle matrice, $A^n = I_2$ avec $n = 1$ ou 2 ou 3 ou 4 ou 6. Explicitez ces matrices.

(b) La question avait été rapportée sous la forme :
Montrer que l'ensemble de ces matrices est fini et qu'il forme un groupe. Qu'en pensez vous ?

Voir corrigé 14.1

Exercice 2.2 *Mines - 2006 - plusieurs planches*

1. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et A une partie on vide de G. Montrer que $AH = H \iff A \subset H$.
2. On considère un groupe G, fini et non réduit à l'élément neutre dans lequel tout élément vérifie $x^2 = e$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe au groupe $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +))$.

Voir corrigé 14.2

Exercice 2.3 *Mines - 2006*
On considère le sous-ensemble V de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ formé des matrices **à coefficients entiers** de la forme

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}.$$

G désigne le sous-ensemble des matrices de V, qui sont inversibles dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$, dont l'inverse est dans V.

1. Quelle est la structure de G?
2. Montrer qu'une matrice $M \in V$ appartient à G ssi son déterminant est égal à ± 1.
3. Donner un groupe standard isomorphe à $(G, \times)$.

Voir corrigé 14.3

Exercice 2.4 *mines 2006*

1. Lorsque $n = 2$, montrer que pour toute matrice de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que
$$AM = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}.$$
2. On suppose que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dont les déterminants sont premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_2$.
3. On suppose que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont les déterminants sont premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

Voir corrigé 14.4

Exercice 2.5 *Centrale 2006 ; 3 planches diverses, difficultés diverses ...*

1. Quel est le plus petit entier n pour lequel il existe un groupe **non commutatif** d'ordre n ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ admet il de sous-groupes ?
3. Soient a, b, c trois entiers. On suppose que $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 7. Montrer qu'i en va de même pour $a\,b\,c$.

Voir corrigé 14.5

Exercice 2.6 *quelques brèves d'arithmétique (mines ou centrale)*

1. Soient a, b, c, trois entiers impairs. Montrer que $a^2+b^2+c^2$ n'est pas le carré d'un entier.
2. Trouver les couples d'entiers $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$, tels que $x^y = y^x$;
3. Résoudre l'équation $X^2 - 4X + 3 = 0$ dans $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$.
4. $F_n = 2^{2^n} + 1$ et F_m pareillement défini seraient ils premiers entre eux ? (en 2006 : en déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini).

Voir corrigé 14.6

Exercice 2.7 *Centrale (OT) accompagné d'une question d'algèbre linéaire*

1. Soit p un nombre premier, résoudre $x^2 = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $(p-1)! \equiv -1[p]$;
3. Donner le reste de la DE de $(n-1)!$ par n.

Voir corrigé 14.7

Exercice 2.8 *Centrale, d'après OT*

1. Montrer que $P(X) = X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que $H = \left\{a + b2^{1/3} + c4^{1/3};\ (a, b, c) \in Q^3\right\}$, est une $\mathbb{Q}-$algèbre
3. En donner une base *(penser à introduire le polynôme minimal de $b2^{1/3}$ lorsque $b \in \mathbb{Q}$...).*

Voir corrigé 14.8

Exercice 2.9 *mines 2009 ; inversibles d'un corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*

1. Soit G un groupe commutatif fini. Démontrer qu'il existe dans G un élément dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
2. Démontrer que pour tout p premier, le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est cyclique.

voir indications ou corrigé en 14.9

Exercice 2.10 *Mines (comparer au suivant)*

On note U le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$.

1. Quel est l'ordre de 5 dans ce groupe ?
2. Donner un groupe additif (produit de groupes remarquables) isomorphe à U.

Voir corrigé 14.10

Exercice 2.11 *inversibles de $\mathbb{Z}/2^p\mathbb{Z}$*

1. Expliciter les groupes des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/2^p\mathbb{Z}$ pour $p = 1, 2, 3$. Ce groupe est il cyclique ?
2. Structure du groupe $(\mathbb{Z}/2^p\mathbb{Z})^\times$
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $5^{2^k} \equiv 1 + 2^{k+2}[2^{k+3}]$;
   (b) En déduire l'ordre de 5 dans $\mathbb{Z}/2^p\mathbb{Z}$ lorsque $p \geq 3$.
   (c) Montrer que le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/2^p\mathbb{Z}$ est isomorphe au produit des groupes additifs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/(p-2)\mathbb{Z}$.

Voir corrigé 14.11

Exercice 2.12 *polynômes cyclotomiques*

On rappelle que le groupe multiplicatif $(\mathbb{U}_n, \times)$ des racines $n^{ième}$ de l'unité dans le corps des complexes est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, qu'une racine primitive $n^{ième}$ de l'unité est un générateur de $\mathbb{U}_n$, à savoir, un élément de la forme $e^{2ik\pi/n}$, avec k premier avec n.
On appelle **polynôme cyclotomique** d'ordre n le polynôme

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \text{racine primitive } n^{ième}} (X - \zeta) = \prod_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right).$$

1. Quel est le degré de $\Phi_n(X)$?
2. Calculer $\Phi_p(X)$, puis $\Phi_{p^s}(X)$, lorsque p est premier.
3. Calculer les polynômes cyclotomiques d'ordres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Vérifier que $X^6 - 1$ est le produit des Φ_k avec $k|6$.
4. Généraliser ce résultat et en déduire que l'indicateur d'Euler vérifie

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \phi(d).$$

Voir corrigé 14.12

Exercice 2.13 *** ENS, niveau compétition*

1. Montrer que tout sous-groupe du groupe additif $(Z^n, +)$ est isomorphe à un groupe $(Z^m, +)$, $m = 1, ..., n$.
2. A quelle condition $(Z^n, +)$ et $(Z^p, +)$ sont ils isomorphes ?

Voir corrigé 14.13

Exercice 2.14 *mines, planches diverses*

1. Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même. On suppose que $\lim \dfrac{f(n)}{n} = L$. Trouver L.
2. Soit p un nombre premier autre que 2 ou 5. Montrer qu'il divise un des entiers 11,111,1111,11111,... (écrits en base 10, bien évidemment).

Voir corrigé 14.14

Exercice 2.15 *Centrale (d'après RMS 333)*
Soit $n > 0$ un entier. On pose $f(n) = (n-1)![n]$.

1. Calculer $f(n)$ pour $n = 1, 2, ..., 6$.
2. On suppose ici n premier et $n \geq 5$. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $x \neq \bar{0}$ et $x \neq x^{-1}$. Calculer $\prod_{k=2}^{n-2} \bar{k}$ et en déduire $f(n)$.
3. Étudier le cas où n est composé.

Voir corrigé 14.15

Exercice 2.16 *Centrale (d'après RMS 333)*
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\nu_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers, $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\pi(x)$ le nombre des entiers premiers compris entre 1 et x.

1. Montrer que

$$\nu_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor.$$

2. Montrer que

$$\binom{2n}{n} \text{ divise } \prod_{p \leq 2n} p^{\lfloor \frac{\ln 2n}{\ln p} \rfloor}.$$

3. Montrer que

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$$

4. Montrer que

$$\frac{x}{\ln x} = \mathcal{O}(\pi(x)).$$

Voir corrigé 14.16

Exercice 2.17 **** ENS Paris (ne pas faire, pour les meilleurs voir le suivant)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier.

1. Montrer que $Tr(A^p) \equiv Tr(A)[p]$;
2. Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ donnée par $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2$ et

$$u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que p divise u_p.

Voir corrigé 14.17

Exercice 2.18 *le même que le précédent mais avec des questions insérées*

1. Démontrer que si p est premier, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ si a et p sont premiers entre eux et, plus généralement, que $a^p \equiv a[p]$ pour tout entier a (petit théorème de Fermat) ;
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
   (a) Développer $\mathrm{Tr}(A^2)$
   (b) Montrer que si A est une matrice carrée de taille n,
   $$Tr(A^p) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} ... \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times ...a_{i_p,i_1}.$$
   (c) On se donne p indices non nécessairement distincts, $i_1, i_2, ..., i_p$ dont les occurrences sont $q_1, q_2, ..., q_k$. Combien de termes de la somme $Tr(A^p)$ sont ils égaux au produit $a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times ...a_{i_p,i_1}$ dans lequel les indices $i_1, ..., i_p$ sont rangés par ordre croissant.
   (d) Développer $\mathrm{Tr}(A^p)$ et montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv Tr(A)[p]$;
3. Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ donnée par $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2$ et

$$u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que p divise u_p.

Voir corrigé 14.18

Exercice 2.19 *Mines*

1. Vérifier que $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique.
2. Déterminer à un isomorphisme près les groupes commutatifs d'ordre 6.

Voir corrigé 14.19

Exercice 2.20 *nombres premiers d'une forme particulière*

1. Soit q un entier. Peut on factoriser (au moins partiellement) dans $\mathbb{Z}[X]$ les polynômes $X^q - 1$ et $X^q + 1$;
2. Soient $a > 1$ et $n > 0$, deux entiers. Montrer que si $a^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.

Voir corrigé 14.20

Exercice 2.21 *Mines, nombres de Fermat*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombres de Fermat).

1. Calculer les premiers termes de cette suite, conjecturer, déconjecturer.
2. Comparer le produit $\prod_{k=0}^{n} F_k$ à F_{n+1}. Conjecturer et démontrer.

3. Montrer que, si $n \neq m$, F_n et F_m sont premiers entre eux.

Voir corrigé 14.21

Exercice 2.22 *CP 2005*

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

Montrer que $f(x)$ est DSE en 0. Préciser le rayon de convergence de ce DSE.

Voir corrigé 14.22

Exercice 2.23 *Mines, mais à connaître de tous*

1. Quels sont les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de $X^n + 3X^{n-1} + 2$ par $(X-1)^2$.

Voir corrigé 14.23

Exercice 2.24 *un corps de caractéristique 5 ayant 25 éléments ;*

On note $\mathbb{F}_5$ le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

1. Écrire la table de multiplication de ce corps ; quels sont ses carrés ? les formules de Cramer y sont elles valides ?
2. On suppose qu'il existe un sur-corps commutatif de $\mathbb{F}_5$ contenant un élément q tel que $q^2 = 2$. Calculer $(a + bq)(a' + b'q)$ dans ce sur-corps.
3. On définit sur $\mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ une addition et une multiplication en posant :
$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \text{ et } (a,b) \times (a',b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b);$$
   (a) Vérifier que muni de ces deux lois $\mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ est un corps de caractéristique 5 ;
   (b) Montrer que $\mathbb{F}_5$ est isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$.
   Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?

Voir corrigé 14.24

Exercice 2.25 *Centrale 2007*

1. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ (groupe des matrices à coefficients entiers de déterminant 1) et f_A définie sur le demi-plan $P = \{z \in \mathbb{C},\ Im(z) > 0\}$ par la relation $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+b}$.
   Montrer que f_A est bien définie et que $A \in SL_2(\mathbb{Z}) \to f_A$ réalise un morphisme du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le groupe des bijections de P dans lui-même.
   Déterminer son noyau.
2. Montrer qu'un groupe qui admet un nombre fini de sous-groupes seulement est fini.

Voir corrigé 14.25

Exercice 2.26 *Centrale 2007*

1. Soient $(G, \star)$ un groupe et H, K deux sous-groupes de G. On pose
$$HK = \{x \in G / \exists (h,k) \in H \times K, x = hk\}.$$
   Montrer que HK est un sous-groupe de G ssi $HK = KH$.
2. Quel est le dernier chiffre de 2004^{2007}?
3. Soient a_n et b_n deux entiers tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$.
   Que vaut $(1-\sqrt{2})^n$?
   Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux (notation $a_n \bigwedge b_n = 1$).

Voir corrigé 14.26

Exercice 2.27 *ENS 2007*
Décrire les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
Voir corrigé 14.27

Exercice 2.28 *le même avec des questions*

1. Démontrer que si f est une application continue bijective de $\mathbb{R}$ dans lui-même, elle est strictement monotone. Montrer que f^{-1} est continue.
2. En étudiant la monotonie des suites $x_{n+1} = f(x_n)$ montrer que si f est une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que $f^{(p)} = id_{\mathbb{R}}$, alors $f = id_{\mathbb{R}}$. En déduire que tout homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans lui-même tel que $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ f^{(p)} = id_{\mathbb{R}}$, vérifie $f^2 = id_{\mathbb{R}}$.
3. Décrire les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Voir corrigé 14.28

Exercice 2.29 *polynômes au km*

1. (CCP 2007) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes
$$P_n(X) = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1.$$
2. (Mines 2007) Trouver les polynômes P tels que
$$(X+4)P(X) = XP(X+1).$$
3. (Centrale PSI 2007) Montrer que si P vérifie
$$P(X) \neq 0 \text{ et } P(X^2) = P(X)P(X-1)$$
ses racines sont complexes de module 1. En déduire les polynômes qui vérifient cette relation.
4. (Mines 2007) Montrer qu'il existe un seul polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que
$$A_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$
Montrer que les racines de A_n sont les $x_k = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
Décomposer $\dfrac{1}{A_n}$ en éléments simples.

Voir corrigé 14.29

Exercice 2.30 *X-2009; la première question est basique*
On considère G l'ensemble des réels de la forme $x + \sqrt{2}y$ où $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in Z$ vérifient $x^2 - 2y^2 = 1$;

1. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
2. Montrer que G est monogène.

Voir corrigé 14.30

3 Déterminants et systèmes linéaires

3.1 Résumé de cours sur la notion de déterminant

3.1.1 Le groupe symétrique

Théorème 3.1 *théorème fondamental*
Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est un produit de transpositions.

Théorème 3.2 Si une permutation de $\mathcal{S}_n$ (avec $n \geq 2$), s'écrit

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_p = \mu_1 \circ \mu_2 \circ ... \circ \mu_q,$$

où les τ_i, μ_j sont des transpositions, alors les entiers p et q ont la même parité.
Le nombre $(-1)^p$ ne dépend que de σ. On l'appelle signature de σ, on le note $\varepsilon(\sigma)$.

3.1.2 Formes n-linéaires alternées en dimension n.

Définition 3.1 *formes multilinéaires*
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f une application de E^n dans $\mathbb{K}$.

— On dit que f est une forme $n-$linéaire si pour chaque $(x_1, ...x_{k-1}, x_{k+1} .., x_n) \in E^{n-1}$, l'application
$$t \in E \to f(x_1, ...x_{k-1}, t, x_{k+1} .., x_n) \in \mathbb{K}$$
est linéaire (en t).

— On dit qu'une forme $n-$linéaire est alternée si pour tout couple d'entiers **distincts,** $(i, j) \in [1, n]$, et pour tout $x \in E^n$
$$x_i = x_j \Rightarrow f(x) = 0.$$

Théorème 3.3 *théorème fondamental*
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et f une forme $n-$linéaire alternée sur E.

— Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et pour tout $x \in E^n$, on a :
$$f(x_1, ..., x_n) = \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma 1}, ..., x_{\sigma n}).$$

— Si $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ est une base de E, alors
$$f(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j} \right) f(b_1, ..., b_n).$$

Théorème 3.4 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B}$. L'application

$$x \in E^n \to \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j} \right) \in \mathbb{K}$$

— est $n-$linéaire, alternée,
— prend la valeur 1 si $x = (b_1, ..., b_n) \in E^n$,
On l'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, et on la note

$$x \in E^n \to \det_B(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}. \tag{3.1}$$

Proposition 3.1 *propriétés du déterminant*
— la formule $\det_B(B) = 1$;
— la formule $\det'_B(B) = \dfrac{1}{\det_B(B')}$;
— la formule $\det'_B(x_1, ..., x_n) = \det'_B(B) \det_B(x_1, ..., x_n)$;
— caractérisation des bases : une famille de vecteurs $(x_1, ...x_n)$ est une base de E ssi

$$\det_B(x_1, ..., x_n) \neq 0.$$

Théorème 3.5 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (b_i)_i$, $\mathcal{B}' = (b'_i)_i$ deux bases de E, ev de dimension n. Alors

$$\det_B(u(b_1), ..., u(b_n)) = \det_{B'}(u(b'_1), ..., u(b'_n)).$$

Définition 3.2 On appelle déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ le déterminant de l'image par u d'une base quelconque par rapport à cette même base :

$$\det(u) = \det_B(u(b_1), ..., u(b_n)).$$

Si M est une matrice carrée, son déterminant est le déterminant dans une base quelconque de l'endomorphisme canoniquement associé.
C'est aussi le déterminant par rapport à la base canonique des la famille de ses vecteurs colonnes.

Théorème 3.6 Si u et v sont deux endomorphisme de E, alors

$$\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v).$$

Théorème 3.7 *propriétés*
Soit M une matrice carrée,
—

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} M_{\sigma(j),j} \right) \tag{3.2}$$

— $\det(M) = \det({}^tM)$
— M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$, et, dans ce cas :

$$\det\left(M^{-1}\right) = \frac{1}{\det(M)},$$

- une permutation des lignes ou des colonnes d'une matrice a pour effet de multiplier le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$;
- les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes,
  1. $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$, ont pour effet de changer le signe du déterminant si $i \neq j$;
  2. $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \leftarrow \alpha C_i$, ont pour effet de multiplier le déterminant par α;
  3. par contre, les opérations $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$, ne changent pas le déterminant si $i \neq j$.

Théorème 3.8 *déterminants par blocs*
On suppose que $n = p + q$. Les notations qui suivent sont sans ambiguïté et

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ O_{q,p} & C \end{bmatrix}\right) = \det(A) \times \det(C).$$

Définition 3.3 *cofacteur*
On appelle cofacteur d'indices i et j d'une matrice M de taille $n \geq 2$, le déterminant de la matrice obtenue en

- remplaçant la colonne j par le vecteur e_i de la base canonique,
- ou encore en remplaçant la ligne i par le vecteur ligne ${}^t e_j$,
- ou encore en plaçant des 0 dans les lignes i et colonne j sauf à leur intersection où l'on placera un 1.

C'est aussi le produit du déterminant de la matrice de taille $n-1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de M par $(-1)^{i+j}$.

Théorème 3.9 *développement par rapport à une ligne ou à une colonne*
Pour toute matrice carrée M de taille n, on a, pour i_0 ou j_0 compris entre 1 et n,

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j_0} \det(C_1, ..., C_{j_0-1}, e_i, C_{j_0+1}, ..., C_n) \tag{3.3}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} \det(L_1, ..., L_{i_0-1}, e_j, L_{i_0+1}, ..., L_n) \tag{3.4}$$

Théorème 3.10 Soit A une matrice carrée de taille n.

- A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$;
- si $\det(A) \neq 0$, alors

  $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A) \tag{3.5}$$

  où la comatrice de A, $Com(A)$ est la matrice des cofacteurs :

  $$c_{i,j} = \det(C_1, ..., C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, ...C_n) = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

  où $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

3.1.3 Les classiques

Théorème 3.11 Le déterminant de la **matrice de Vandermonde** définie par

$$V(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \vdots & a_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix},$$

est égal au produit :

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i).$$

Démonstration : en introduisant le polynôme

$$P(x) = V(a_0, a_1, ..., a_{n-2}, x);$$

Théorème 3.12 Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Le déterminant de la **matrice circulante**

$$\Gamma(a_1, ..., a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{bmatrix},$$

est

$$\det(\Gamma(a_1, ..., a_n) = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j).$$

Démonstration-exercice :

1. Soit ω une racine $n^{ième}$ de l'unité et $W = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix}$. Montrer que W est vecteur propre de $\Gamma(a_1, ..., a_n)$. Exprimer la valeur propre qui lui est associée en fonction de $P(X) = \sum a_i X^{i-1}$.
2. En déduire qu'une matrice circulante est diagonalisable et calculer son déterminant.

3.1.4 Déterminants et géométrie, espaces euclidiens

Théorème 3.13

— Dans un plan euclidien de base orthonormée directe $\mathcal{B}$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(u,v) = ||u||||v|| \sin\left(\widehat{(u,v)}\right) \text{ et } \langle u,v\rangle = ||u||||v|| \cos\left(\widehat{(u,v)}\right);$$

— Dans un plan (ou un espace) affine euclidien l'aire (ou le volume) d'un parallélogramme $ABCD$ (ou d'un parallélépipède construit sur les n arrêtes $A_0A_1A_0A_2, ..., A_0A_n$) est

$$|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| \text{ ou } |\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, ..., \overrightarrow{A_0A_n})|;$$

— Dans un espace euclidien de dimension 3, le produit vectoriel et le déterminant dans une BOND sont liés par la relation

$$\det_{\mathcal{B}}(u,v,w) = \langle u|v \wedge w\rangle.$$

3.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire :

Ce que dit le rapport d'oral des CCP 2007 à ce propos :
Lors de la recherche des valeurs propres d'une matrice 3×3, *certains élèves manipulent mal et parfois même incorrectement les déterminants.*

Consulter le résumé de cours (3.1.1) pour vous assurer que vous n'ignorez rien de ce qui s'y trouve !

Règles de calculs sur les lignes et colonnes les exercices (3.4), (3.3), (3.10), (3.9),
- s'entraîner avec des déterminants classiques : déterminants de Vandermonde (ex. 3.11), déterminants circulants (ex.3.1.3)),
- se souvenir de la façon de traiter les récurrences linéaires d'ordre 2 qui apparaissent avec les déterminants tridiagonaux (ex. 3.10, ex. 3.11...) ;

connaître les formules : expression développée (3.2), déterminant de l'inverse (3.5), les formules de **Cramer**, se souvenir de l'existence de la **comatrice**, de sa définition (3.1),(2.4). [3]

3.3 Énoncés

Exercice 3.1 *Concours 2015 (PC, parmi deux questions)*

Classique, on peut proposer plusieurs façons de faire

Lignes et colonnes : faire preuve d'organisation de méthode. Ou encore une méthode non calculatoire...
Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre n dont tout les termes valent 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls.
Voir corrigé 14.31

Exercice 3.2 *CCP-2006*

1. Expliquer brièvement pourquoi ${}^tCom(A)\,A = det(A)I_n$.

3. Document disponible sur `mpcezanne.fr` ou `univenligne.fr` sous le nom `RevisonsOralMP2010.pdf`

(a) On suppose que A admet n valeurs propres distinctes. Que représente un vecteur propre de A pour ${}^tCom(A)$?

(b) ${}^tCom(A)$ est elle diagonalisable ?

Voir corrigé 14.32

Exercice 3.3 ****
Calculer le determinant de la matrice carrée de taille n M, telle que $m_{i,j} = (i+j-1)!$ A titre d'exemple :

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! & 5! \\ 2! & 3! & 4! & 5! & 6! \\ 3! & 4! & 5! & 6! & 7! \\ 4! & 5! & 6! & 7! & 8! \\ 5! & 6! & 7! & 8! & 9! \end{bmatrix}$$

voir Indications ou corrigé 14.33.

Exercice 3.4 Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\begin{cases} M_{i,i} = r_i, \\ M_{i,j} = b, & \text{si } i > j, \\ M_{i,j} = a, & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Ainsi, par exemple :

$$M = \begin{bmatrix} r_1 & a & a & a \\ b & r_2 & a & a \\ b & b & r_3 & a \\ b & b & b & r_4 \end{bmatrix}$$

1. On note C_j la $j^{ième}$ colonne de la matrice M, et U le vecteur de $\mathbb{C}^n$ de coordonnées égales à 1. Calculer
$$P(x) = det(C_1 + xU, C_2 + xU, ..., C_n + xU).$$
2. En déduire une expression de $det(M)$.

Voir indications ou corrigé en 14.34.

Exercice 3.5 *Centrale*
Soit $a_1, ..., a_n$ une famille de réels positifs tels que $a_1 > 0$ et $a_n > 0$. On lui associe la matrice $M_{[n]} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} M_{[n]\,i,1} = a_i \\ M_{[n]\,i,i+1} = 1 \\ M_{[n]\,i,j} = 0 \text{ si } i \neq 1, j \neq i+1. \end{cases}$$

Ainsi, $M_{[5]} = \begin{bmatrix} a1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $M_{[n]}$. Montrer que cette matrice admet une valeur propre positive au moins.
2. Montrer que $M_{[n]}^p$ est une matrice à termes strictement positifs, à partir d'un certain rang p_0.
   Indication : écrire $M_{[n]} = A + N$...
3. Montrer que si r est une valeur propre positive de $M_{[n]}$, on a

$$r < 1 + \text{Max}(a_i).$$

   Que dire des autres valeurs propres ?

Voir indications ou corrigé 14.35.

Exercice 3.6 *un calcul de déterminant*

Nous notons T_n et S_n les sous-espaces des matrices carrées d'ordre n triangulaires inférieures et supérieures.
Pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A = [a_{i,j}]$.

1. Soit $C = \begin{bmatrix} I_{n-1} & Y \\ {}^tX & a \end{bmatrix}$, montrer que son déterminant est égal à

$$a -^t X \, Y.$$

2. En déduire lorsque B est inversible, celui de

$$D = \begin{bmatrix} B & Y \\ {}^tX & a \end{bmatrix}.$$

3. On note ici, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et pour $1 \leq p \leq n$, $A_p = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$.
   Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
   — $det(A_p) \neq 0$ pour tout p tq $1 \leq p \leq n$
   — Il existe $U \in S_n$, et $V \in T_n$, toutes deux inversibles telles que $A = VU$.

voir indications ou corrigé 14.36.

Exercice 3.7

1. Montrer que pour toute matrice de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que

$$A' \, A = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}.$$

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminants $a = \det(A)$ et $b = \det(B)$.
   (a) Montrer qu'il existe deux matrices A' et B' de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que

$$A'A + B'B = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}.$$

   (b) On suppose que a et b sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices A" et B" de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $A\text{"}A + B\text{"}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (c) Construire ces matrices A" et B" lorsque

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Quel est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $UA + VB$ lorsque A, B sont deux matrices de déterminants premiers entre eux ?

Exercice 3.8 *centrale, calculette disponible*
Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de cette matrice et montrer que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
2. La matrice A_3 est elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. Montrer que A_n admet une valeur propre strictement positive et une seule, que l'on notera x_n.
4. Étudier le comportement de x_n à l'infini.

Voir indications ou corrigé **??**.

Exercice 3.9 *CCP PC 2002*

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Voir corrigé **??**

Exercice 3.10 *CCP 2002 PSI*

Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n+\dfrac{1}{n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & n+\dfrac{1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & n+\dfrac{1}{n} \end{vmatrix}$$

Voir corrigé 14.37

Exercice 3.11 *CCP - MP, questions diverses (en général, en association-voir OT)*

1. Comparer les polynômes caractéristiques de A et de A^{-1}, lorsque A est inversible.

2. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Voir corrigé 14.38

Exercice 3.12
Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de réels strictement positifs. On note $\Delta_n(X)$ le polynôme caractéristique ($det(M_n - X)$) de la matrice carrée d'ordre n, ($n \geq 2$), définie par

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_{n-1} & 0 & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. On pose $\Delta_0(X) = 1$, $\Delta_1(X) = -X$. Calculer $\Delta_2(X)$, $\Delta_3(X)$. Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite des polynômes $\Delta_n(X)$.
2. Montrer que pour tout entier naturel p non nul, il existe des polynômes de degré p, $F_p(X)$ et $G_p(X)$ à coefficients strictement positifs tels que :

$$\Delta_{2p}(X) = F_p(X^2),\ \ \Delta_{2p+1}(X) = -XG_p(X^2)$$

3. Quel est le polynôme caractéristique de

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a_2b_2} & 0 \\ -\sqrt{a_2b_2} & 0 & \sqrt{a_1b_1} \\ 0 & -\sqrt{a_1b_1} & 0 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que la matrice M_n admet des valeurs propres imaginaires pures.

Voir corrigé 14.39

Exercice 3.13

1. Combien de multiplications pour calculer un déterminant en développant par rapport à la première ligne ?
2. Combien d'opérations pour inverser une matrice, pour calculer un déterminant par opérations sur les lignes ?

Voir corrigé 14.40

Exercice 3.14 *Mines 2007 (parmi 3)*
Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(A) = \pm 1$.
2. On suppose que pour tout entier k compris entre 0 et $2n$, $A + kB$ est inversible et que $(A - kB)^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Calculer $det(B)$.

indication : étudier $det(A + xB)$.
Voir corrigé 14.41

4 Applications linéaires, calcul matriciel, réduction, polynômes d'endomorphismes

4.1 Résumé de cours : réduction des endomorphismes

4.1.1 Valeurs propres, sous espaces propres

Définition 4.1 Soit E ,un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$, u un endomorphisme de E.

— on appelle **valeur propre** de E un scalaire α tel que $Ker(u - \alpha id_E) \neq O$;

— on appelle **vecteur propre** de u, associé à la valeur propre α, un vecteur **non nul** $x \in E$ tel que $u(x) = \alpha x$;

— on appelle **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre α, le sev $Ker(u - \alpha id_E)$;

— on appelle **polynôme caractéristique** de E, le polynôme

$$X \to det(u - X id_E);$$

Ses racines dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u; **l'ordre de multiplicité** d'une valeur propre est son ordre de multiplicité comme racine de ce polynôme.

4.1.2 Réduction des endomorphismes

Théorème 4.1 *trigonalisation*
Soit f un endomorphisme de E, $\mathbb{K} - ev$ de dimension n. Si le polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$ (ce qui est toujours le cas dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{R}$), alors :

— Il existe une base de trigonalisation pour f;

— dans une telle base, les termes diagonaux de la matrice représentative de f sont ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité en tant que racines du polynôme caractéristique.

On prendra garde au fait qu'une même matrice à coefficients réels peut être diagonalisable ou trigonalisable dans $\mathbb{C}$, sans l'être dans $\mathbb{R}$.

Théorème 4.2 Si f est un endomorphisme de E, les sous-espaces propres de f sont en somme directe [4] (ce qui ne signifie pas qu'ils sont supplémentaires)

$$\sum_{\lambda \in Sp(f)} ker(f - \lambda Id_E) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} ker(f - \lambda Id_E).$$

Corollaire 4.1 *Résultat fondamental en pratique :*
Si f est un endomorphisme de E, de dimension finie, les propositions suivantes sont équivalentes :

— f est diagonalisable

— les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E :

$$\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} ker(f - \lambda Id_E) = E.$$

4. il suffit d'ailleurs que les λ soient des scalaires distincts, non nécessairement des valeurs propres...

— la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E :

$$\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim\ ker(f - \lambda Id_E) = \ \dim E.$$

Corollaire 4.2 *corollaire du corollaire, volontairement non cité dans le cours, ce n'est qu'une condition suffisante anecdotique*
Soit f un endomorphisme de E de dimension n. Si f admet n valeurs propres distinctes (c'est le cas ssi son polynôme caractéristique a des racines simples) alors f est diagonalisable.

4.1.3 Polynômes d'endomorphismes

A tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, et tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on associe

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \in \mathcal{L}(E).$$

On dit que $P(u)$ est un polynôme en u.

Proposition 4.1 Soit u un endomorphisme de E.

— si $w = v^{-1} \circ u \circ v$, alors, pour tout polynôme P,

$$P(w) = \sum a_k w^k = v^{-1} \circ \sum a_k w^k \circ v = v^{-1} \circ P(u) \circ v,$$

en particulier, pour tout entier n, $w^n = v^{-1} \circ u^n \circ v$.

— si $\lambda \in Sp(u)$, $P(\lambda) \in Sp(P(u))$ et pour tout $x \in E$,

$$u(x) = \lambda x \Rightarrow P(u)(x) = P(\lambda).x.$$

Théorème 4.3 *Cayley Hamilton*
Soit f un endomorphisme de E de dimension finie ($n = 2, 3, ...$), et χ_f son polynôme caractéristique. Alors $\chi_f(f) = 0$, le polynôme caractéristique est annulateur de f ;

Théorème 4.4 *polynôme annulateur à racines simples*
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Alors, u est diagonalisable ssi il existe un polynôme scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.

Définition 4.2 *polynôme minimal*
Soient E un ev de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, u un endomorphisme de E. On appelle **polynôme minimal de l'endomorphisme u** le polynôme unitaire π_u tel que $Ker(\phi_u) = \pi(X)\mathbb{K}[X]$

Théorème 4.5 *caractérisation des endomorphismes diagonalisables et polynôme minimal*
Soient E un ev de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et u un endomorphisme de E. u est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.

4.1.4 Stabilité, lemme des noyaux

Théorème 4.6 *Matrices dans une base adaptée à des supplémentaires stables*
Soit $(F_i)_i$, une famille de sous-espaces supplémentaires dans E, stables par f. Alors, la matrice de f, dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, est diagonale par blocs :

$$Mat(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{bmatrix}$$

où les matrices Ai sont des matrices carrées de taille $p_i = dimF_i$.

Théorème 4.7 *stabilité et endomorphismes qui commutent*
— si $u \circ v = v \circ u$, alors $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v.
— si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.
— si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres, les noyaux, les images, de tout polynôme en u sont stables par v. En particulier $v(Ker(P(u)) \subset Ker(P(u))$.

Théorème 4.8 *de décomposition des noyaux*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n , u un endomorphisme de E et deux polynômes premiers entre eux : P et Q. Alors, le noyau de $R(u) = (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ est somme directe des noyaux de $P(u)$ et de $Q(u)$:

$$Ker(P(u) \circ Q(u)) = Ker(P(u)) \oplus Ker(Q(u)).$$

Théorème 4.9 *généralisation*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n , u un endomorphisme de E.
— si $P_1, ...P_n$ sont deux à deux premiers entre eux ($C_n^2 = \binom{n}{2}$ relations), P_n et $\prod_{i=1}^{n-1} P_i$ sont premiers entre eux.
— si $P_1, ...P_n$ sont deux à deux premiers entre eux, alors

$$Ker(P_1(u) \circ ... \circ P_n(u)) = \bigoplus_{i=1}^{n} Ker(P_i(u)).$$

4.1.5 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Théorème 4.10 Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Alors,
— il existe un endomorphisme u^* et un seul tel que

$$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ < u(x)|y > = < x|u^*(y) >; \tag{4.1}$$

— si M est la matrice de u dans une base orthonormée, $\mathcal{B}$, la matrice de u^*dans cette même base est la transposée de M.

Définition 4.3
L'endomorphisme u^* défini par la relation (4.1), est (appelé) l'adjoint de u.

Théorème 4.11 Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E.

1. u est diagonalisable ;
2. ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux ;
3. il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres de u.

4.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire :

Consulter le résumé de cours pour ce qui est des connaissances théoriques. Vous devez aussi connaître les techniques de base :

— **inversion d'une matrice par la méthode du pivot,** y compris en l'absence de moyens informatiques (voir les exercices 4.39, 3.13 sur les déterminants (avec un rappel de la méthode avec son corrigé)),

— **recherche d'une base de réduction :** trigonalisation, diagonalisation (voir ex. 4.9 ou 4.11),... pensez que pour déterminer des valeurs propres **il n'y a pas que le polynôme caractéristique,** la trace de M et de M^2 fournissent des indications ainsi que l'étude directe du système $MX = \lambda X$ lorsque les matrices sont lacunaires ou de rang petit (voir les exercices 4.12, $4.26, 4.27, 4.32, 4.44$) ainsi que les classiques : matrices circulantes (voir 3.1.3), matrices de Vandermonde (voir 3.11), matrices stochastiques (voir l'exercice 4.7)

— **le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux conjointement** fournissent des sous-espaces stables et des bases de diagonalisation par blocs (exercices 4.9 , 4.11, 4.29.) ;

— **La recherche d'un polynôme annulateur, du polynôme minimal,** s'imposent dans certains cas : voir les exercices ex. 4.24, 4.28, 4.32, 4.33, 4.46.

Ce que dit le rapport CCP 2007 à ce propos :

— *Formule de changement de base : confusion entre...*
Je rappelle donc, dans l'ordre, coordonnées, matrices d'un endomorphisme, matrice d'une forme quadratique :

$$\boxed{PX' = X,\ \ A' = P^{-1}AP,\ \ A' = {}^tP\,A\,P,} \tag{4.2}$$

où P est la matrice de passage, X', A' les coordonnées et matrices dans la nouvelle base, X, A dans l'ancienne.

— *Imprécisions concernant la correspondance fondamentale entre un endomorphisme et une matrice. Certains candidats parlent de l'image d'un vecteur par une matrice* (sans doute faut il parler du produit MX, ou des coordonnées de l'image de x -vecteur de coordonnées $X-$ par l'endomorphisme associé à M).

— *Certains étudiant disent qu'en dimension finie toute application linéaire injective est aussi bijective sans préciser que E et F doivent être de même dimension.*

— *Un manque de connaissances en géométrie constitue un handicap en algèbre linéaire (projections, symétries).*

— *Polynôme annulateur : confusion parfois entre P, $P(u)$, $P(u)(x)$.*
J'invite à ce propos à relire les démonstrations du lemme des noyaux ou de la caractérisation des endomorphismes diagonalisables par annulation d'un polynôme scindé à racines simples - celle qui fait intervenir les polynômes de Lagrange.

— *Le théorème sur l'utilisation d'un polynôme annulateur* (celui là même qui vient d'être cité) *est parfois mal connu.*

— *Certains oublient qu'un vecteur propre, par définition, est non nul.*

— *Équivalence entre 0 est valeur propre de u et u non injectif;*

— *En dimension finie, la caractérisation d'une somme directe de deux sev faisant appel à leurs dimensions est parfois mal connue.*

Rebelote en 2015 pour l'algèbre linéaire et la réduction des endomorphismes

∘ *En dimension infinie, pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires sur*

E, peu de candidats pensent rapidement à raisonner par analyse et synthèse ou quand ils y pensent, la phase de synthèse ou vérification que la décomposition obtenue convient, est très souvent oubliée.

- *Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, il y a bien existence d'un supplémentaire mais il n'est pas unique !!!*
- *Trop de candidats annoncent u injectif ssi u surjectif ssi u bijectif car u endomorphisme (**sans évoquer qu'ils sont en dimension finie**) ou car on est en dimension finie juste (sans dire que l'espace de départ et d'arrivée doivent avoir la même dimension).*
- *Savoir trouver rapidement une base de l'image pour une application linéaire en dimension finie.*
- *Erreurs trop fréquentes dans l'utilisation des formules de changement de base…*

Réduction des endomorphismes

- Ce chapitre met en évidence, au moment de déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme, le manque fréquent de technicité pour calculer un déterminant.
- Les candidats devraient connaitre sur le bout des doigts les différentes équivalences au fait qu'un endomorphisme soit diagonalisable... Et c'est loin d'être le cas !!!
- Erreur courante : un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples !!! Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples alors u est diagonalisable mais la réciproque est bien entendu fausse, il suffit de considérer la matrice nulle de $M_2(R)$ comme contre-exemple.
- Problèmes courants de vocabulaire.
  Exemples :
  - A^2+3A+I_3 est un polynôme annulateur de A au lieu de X^2+3X+1 est un polynôme annulateur de A.
  - le polynôme annulateur au lieu d'un polynôme annulateur.
- Confusions fréquentes entre le polynôme minimal, caractéristique et un polynôme annulateur quelconque.
- De grosses confusions sur les polynômes d'endomorphismes :
  Exemple : si on demande de vérifier que X^2+3X+1 est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u, de nombreux candidats tentent de former $(u(x))^2+3u(x)+1$ au lieu de $uou(x)+3u(x)+x$.
  Ce constat explique que ces mêmes candidats peuvent difficilement trouver un polynôme annulateur pour un endomorphisme donné.
- Si P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u, la quasi-totalité des candidats pensent que les racines de P sont alors exactement les valeurs propres de u alors que seule l'inclusion de l'ensemble des valeurs propres dans l'ensemble des racines de P est vraie.
- Une erreur fréquente : si $dim Ker u = p$ alors 0 est valeur propre de multiplicité p.
  Rappelons que seul le résultat $1 \leq dim E_\lambda \leq m_\lambda$ est vrai.
  En fait, pour de trop nombreux candidats, la confusion entre multiplicité d'une valeur propre dans le polynôme caractéristique et dimension du sous-espace propre associé est fréquente.

Le chapitre réduction des endomorphismes semble survolé par certains candidats alors que c'est une partie cruciale du programme d'algèbre.

4.3 Énoncés

Exercice 4.1 *CCP 2015*

Un vrai exercice d'Oral. Pas stéréotypé !
Un peu de calcul algébrique (substitutions) et du classique sur les polynômes d'endomorphismes
Mais il faut aussi chercher, réfléchir : l'occasion de montrer qu'on aime ça.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 +^t A = I_n$.

1. Déterminer un polynôme de degré 4 annulateur de A.
2. Que peut on en déduire quant à la matrice et à son spectre ?
3. Montrer que si 0 n'est pas vp de A, $A - I_n$ est inversible et A est symétrique.
4. Lorsque $n = 3$, montrer que la trace de A est non nulle.

Exercice 4.2 *Mines PSI 2015*

Principe à connaître

Organiser réflexion et calculs...
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont 1, 2, ...,n les autres étant égaux à 1.

Montrer que λ est valeur propre de A ssi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$ et que les valeurs propres sont distinctes.
Voir corrigé en (14.42).

Exercice 4.3
Soit f l'endomorphisme de matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dans une base $\mathcal{B}$ de E.

1. f est il diagonalisable, trigonalisable ?
2. Existe-t-il une base de E dans telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Calculer A^p et $exp(A) = \sum \dfrac{A^n}{n!}$ (attendre d'avoir étudié le chapitre evn).

Exercice 4.4 *classique*
Montrer que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent ont une base de diagonalisation commune.
Voir corrigé 14.43

Exercice 4.5 *divers exercices des MInes 2016*

1. (a) Soient E, F deux $\mathbb{K}-$ev de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,E)$, deux applications linéaires. On suppose que $\begin{cases} u \circ v \circ u & = u \\ v \circ vu \circ v & = v \end{cases}$, montrer que $Keru$ et Imv sont supplémentaires.
   (b) Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, E_1 et F_1 deux sev de E et de F tels que $Keru \oplus E_1 = E$ et $Imu \oplus F_1 = F$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $v \in \mathcal{L}(F,E)$, telle que $Kerv = F_1$, $Imv = E_1$ et $\begin{cases} u \circ v \circ u & = u \\ v \circ u \circ v & = v \end{cases}$
2. Quelles sont les matrices carrées commutant avec $O_3(\mathbb{R})$?

Voir corrigé 14.44

Exercice 4.6 *matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

1. Donner un exemple de matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui soit inversible sans que, pour autant, ni sa partie réelle, ni sa partie, imaginaire ne le soient.
2. On suppose que $P = R + iQ$ est inversible et que A et B sont deux matrices à coefficients réels. Montrer que $P^{-1}\,A\,P = B$ ssi $AR = RB$ et $AQ = QB$.
3. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Voir corrigé en 14.45

Exercice 4.7 *matrices stochastiques*

On dit qu'une matrice $A \in E$ est une matrice stochastique ssi elle vérifie :

$$\begin{cases} a_{i,j} \geq 0, & \text{pour tous } i,j \in [1,d]^2\,; \\ \\ \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} = 1, & \text{pour tout } i \in [1,d]. \end{cases}$$

On note S l'ensemble de ces matrices.

1. Soit $A \in S$.
   (a) Montrer que 1 est valeur propre de A, donner un vecteur propre associé.
   (b) Démontrer que toute valeur propre complexe de A vérifie $|\lambda| \leq 1$.
   (c) Montrer qu'il existe des matrices stochastiques ayant plusieurs valeurs propres de module 1
2. **Questions de topologie**
   (a) Soit $P \in GL_d(\mathbb{R})$, une matrice inversible. Justifier (brièvement) que l'application ϕ : $A \in E \to P^{-1}AP \in E$ est continue.
   Que pensez vous de l'affirmation : pour toute suite d'éléments de E et quelle que soit la norme considérée
   $$\lim A_n = A \Rightarrow \lim(P^{-1}A_nP) = P^{-1}AP?$$
   (b) Montrer que S est fermé et borné dans $E = \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et stable par multiplication.

Voir corrigé 14.46

Exercice 4.8 *CCP - 2006, diverses planches (OT)*

1. Soient a, b, c trois réels et $A = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) A est elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;
   (b) dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

(c) Pouvait on prévoir que 0 est valeur propre ?

2. E désigne un $\mathbb{K}-ev$ de dimension $n > 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que f peut être de rang 1 sans être un projecteur.
   (b) Montrer que si f est de rang 1 et si $\text{trace}(f) = 1$, alors f est un projecteur.
   (c) Caractériser et classer les endomorphismes de rang 1.
   (d) Donner une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Voir corrigé 14.47

Exercice 4.9

Soit $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et donner deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
2. **En déduire** les matrices qui commutent avec A
3. Résoudre $M^2 = A$.

voir indications ou corrigé 14.48.

Exercice 4.10 *CCP ou Centrale PSI*
Soit u un endomorphisme de E de dimension n, finie, et

$$F_u = \{v \in \mathcal{L}(E); u \circ v = v \circ u\}.$$

1. On suppose que u a toutes ses valeurs propres distinctes. Montrer que la famille

$$(id_E, u, u^2, ..., u^{n-1})$$

   est libre et que c'est une base de F_u.
2. Soit $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. (I_3, B, B^2) est elle libre ?
3. Décrire F_v lorsque u est diagonalisable avec des valeurs propres distinctes ou pas. Dimension ?
4. Montrer que l'on a toujours $\dim \mathrm{F_u} \geq \mathrm{n}$.

voir indications ou corrigé 14.49.

Exercice 4.11 *avec calculette*
Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ de matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -4 \\ -10 & 14 & 28 & -26 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que f n'est pas diagonalisable et donner une base de E dans laquelle sa matrice est à la fois diagonale par blocs et triangulaire.

2. Montrer que A est semblable à

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

en considérant une base (u, v_1, v_2, v_3) avec $u \in Ker(f+4)$, $v_1 \in Ker(f-4)$, v_2 tel que $(f-4)(v_2) = v_1$, etc... Expliquer cette méthode.

Voir indications ou corrigés 14.50.

Exercice 4.12 *Centrale MP*

Soit $(a_1, a_2, ..., a_{2n+1})$, une suite de 2n+1 complexes. On lui associe la matrice $M_n(a_1, a_2, ..., a_{2n+1})$, de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ notée aussi M_n, dont les seuls termes non nuls sont soit sur la colonne n+1, soit sur la ligne n+1, avec : $m_{n+1,j} = a_j$ et $m_{i,n+1} = a_i$.

Par exemple :

$$M_2(a,b,c,d,e) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de M_n.
2. Calculer M_n^2, et en déduire le polynôme caractéristique de M_n.
3. M_n est elle diagonalisable ?

voir indications ou corrigé 14.51

Exercice 4.13 *CCP*

Montrer que $A = \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et calculer A^n.

voir indications ou corrigé 14.52

Exercice 4.14 *CCP*

Soit $z \in C$, on lui associe la matrice

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de z est-elle diagonalisable ?

voir indications ou corrigé 14.53

Exercice 4.15 *Mines 2007*

Soit $z \in C$, on lui associe la matrice

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de z est-elle diagonalisable ?
voir indications ou corrigé 14.54

Exercice 4.16 *CCP 2007*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Rang de A? Est-elle diagonalisable ?
voir indications ou corrigé 14.55

Exercice 4.17

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$, de valeurs propres -2 et 1.

1. Montrer que si f est diagonalisable, alors (Id_E, f, f^2) est liée et qu'il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que
$$f^n = a_n id_E + b_n f.$$
2. On suppose que f est non diagonalisable. Montrer que f peut s'exprimer dans une base convenable à l'aide de l'une ou l'autre des matrices
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
Calculer alors f^n.

voir indications ou corrigé 14.56

Exercice 4.18 *CCP-PSI-2002*
Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$f \circ f = g \circ g = -id_E \text{ et } f \circ g + g \circ f = 0.$$

1. Valeurs propres, ordres de multiplicité, ...
2. Vecteurs propres des matrices associées à f et g dans la base canonique ?

voir indications ou corrigé 14.57

Exercice 4.19 *CCP-PSI-2003*
On considère une matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$, tels que ${}^tM = M^{-1} + aI_n$. On pose $B = {}^tM\ M$.

1. Montrer que B est ... ;
2. Montrer que M est diagonalisable ;
3. Déterminer un polynôme annulateur de M;

Voir corrigé 14.58

Exercice 4.20 *CCP-2002-PSI*
Montrer que la somme des carrés des coefficients d'une matrice symétrique réelle est égale à la somme des carrés de ses valeurs propres.
Voir corrigé 14.59

Exercice 4.21 *CCP PSI 2002*
Soient A et B deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$. On pose $C = A\ {}^tB$ et $D = C - I_n$.

1. Donner une CNS pour que D soit inversible ;
2. Si c'est le cas, calculer D^{-1}.

Voir corrigé 14.60

Exercice 4.22 *CCP PSI 2002*

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & a^3 & a^2 & a^4 \end{bmatrix}$ avec a réel.

1. Pour quelles valeurs de a cette matrice est elle inversible ?
2. On suppose que A n'est pas inversible, montrer qu'elle est diagonalisable.

Voir corrigé 14.61

Exercice 4.23 *CCP*

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer (sans calculer P^{-1}), les matrices P telles que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Voir corrigé 14.62

Exercice 4.24 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$u^3 + u^2 + u = O.$$

Montrer que le rang de u est pair.
Voir corrigé 14.63

Exercice 4.25 *CCP*

1. Montrer qu'une matrice carrée à coefficients réels vérifiant $A^2 = -id_n$, est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à
$$B = \begin{pmatrix} M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M \end{pmatrix}$$
avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. A et B sont elles aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Voir corrigé 14.64

Exercice 4.26 On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c \\ a & a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son rang, son noyau.
2. En déduire ses valeurs propres et donner une CNS de diagonalisation.

Voir corrigé 14.65

Exercice 4.27 *CCP - MP (analogue au précédent)* On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son rang et son noyau ;
2. Avec la trace, que dire des valeurs propres ?
3. Donner une CNS de diagonalisation.

Voir corrigé 14.66

Exercice 4.28
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{bmatrix} O_n & I_n \\ A & 0_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Conditions sur A pour que B soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Voir corrigé 14.67

Exercice 4.29 *Centrale 2002*
Soit A une matrice non inversible et non nilpotente de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, avec $n > 1$, et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Montrer, en utilisant par exemple le lemme des noyaux, qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de $\mathbb{K}^n$, stables par f et tels que la restriction de f à F soit un isomorphisme, la restriction de f à G soit nilpotente (on pourra commencer par factoriser le polynôme caractéristique).
2. Déterminer une matrice de la forme $\begin{bmatrix} U & O \\ O & N \end{bmatrix}$ semblable à

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

   avec U et N matrices carrées d'ordre 2, U inversible et N nilpotente.
3. Calculer A^p.

voir corrigé 14.68 .

Exercice 4.30 *Cen (OT)*
Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que B est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi sa transposée l'est aussi ;
2. Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to AMB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que f est diagonalisable si A et B le sont. Réciproque ?
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les applications du type ci-dessus.

Voir corrigé 14.69

Exercice 4.31
Soit E un espace vectoriel **réel** de dimension $n \geq 3$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que $f^3 = id_E$.

1. Que peut on dire des polynômes minimal et caractéristique de f.
2. Déterminer les endomorphismes qui vérifient $f^3 = id_E$ lorsque $n = 3$.
3. Et lorsque $n = 4$.

Voir corrigé 14.70

Exercice 4.32 *2 questions similaires posées aux mines*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les éléments propres de
$$B = \begin{bmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{bmatrix}.$$
2. (a) Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Déterminer les éléments propres de
$$B = \begin{bmatrix} A & A & A & A \\ A & 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 & A \\ A & A & A & A \end{bmatrix}.$$
   (b) Généraliser à une matrice de taille n ;

Voir corrigé 14.71

Exercice 4.33 *au km, des exos CCP*

1. Soit
$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$
Est elle trigonalisable ? Préciser une matrice de passage.
2. Soit $B = \begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix}$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit P un polynôme. Exprimer $P(B)$ en fonction de $P(A), P'(A)$...
   (b) En déduire une CNS pour que B soit diagonalisable.
3. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^2 + A + I = 0$. A est elle diagonalisable ? Montrer que son rang est pair.
   (b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $B^3 + B^2 + B = 0$. Que dire de la parité de son rang ?

Voir corrigé 14.72

Exercice 4.34

1. Résoudre les équations $X^2 = A$ lorsque $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, puis $\begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En déduire que l'équation $X^2 = A$ admet toujours des solutions.
2. (a) Soit $a + ib$ un complexe (a, b réels comme de bien entendu) ; quelles sont les solutions de $e^z = a + ib$?

(b) L'application $exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est elle surjective ? Déterminer son image lorsque n=2.

Voir corrigé 14.73

Exercice 4.35 *CCP-MP*
Soient a, b, c, d quatre complexes avec $a^2 + b^2 \neq 0$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

1. Calculer A^tA ainsi que $\det(A)$. Montrer que A est de rang 2 ou 4 ;
2. A est elle diagonalisable lorsque $a^2 = b^2 + c^2 + d^2 = 0$?

Voir corrigé 14.74

Exercice 4.36 *exponentielles de matrice, version algèbre*

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que $det(exp(A)) = e^{tr(A)}$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, nilpotente, montrer que $Ker(e^A - I_n) = Ker(A)$.
3. Soit $M(a, b) = \begin{bmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & b+a \end{bmatrix}$.
   On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices de la forme $M(a, b)$.
   (a) Calculer $exp(M(a, b))$.
   (b) Les matrices inversibles de $\mathcal{G}$ forment elles un groupe ? [5]
   (c) les éléments de $\mathcal{G}^\times$ sont ils dans l'image de $\mathcal{G}$ par exp ?

Voir corrigé 14.75

Exercice 4.37 *Mines*
On considère un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que

— rg f =2 ;
— dim (Im $f\cap$ Ker f) =1 ;
— dim (Im $f^2\cap$ Ker f^2) =0 ;

1. Quel est le rang de f^2?
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la forme
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$
3. Sous quelles conditions l'endomorphisme de matrice
$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$
   dans une base de $\mathbb{K}^n$ vérifie-t-il les propriétés

5. La question est rapportée sous la forme : Quels sont les sous-groupes de matrices inversibles contenus dans $\mathcal{G}$, ensemble des matrices de la forme $M(a, b)$?- je ne sais qu'en penser 05/2008-

Voir corrigé 14.76

Exercice 4.38 *CCP 2005*
Soient u et v les deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par $u : P \to P(X+1)$ et $v : P \to P(X-1)$

1. Déterminer la rang de $u - v$ à l'aide de sa matrice ;
2. puis par une autre méthode.

Voir corrigé 14.77

Exercice 4.39 *Mines 2005, divers énoncés*

1. Quel est l'inverse de la matrice

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & a^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Soit $a \in R$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Polynôme minimal ?
   (b) A est elle diagonalisable ?
   (c) e^A ?

Voir corrigé 14.78

Exercice 4.40 *Oral Centrale*
A tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et tout couple de réels (a, b) on associe la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ si } n = 1, \quad A_{2n} = \begin{bmatrix} a & b & a & b & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ b & a & b & a & \dots & b & a \end{bmatrix} \text{ si } n \geq 1$$

1. Déterminer les éléments propres de de A_2;
2. Quel est le rang de A_{2n}?
3. Déterminer les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de A_{2n}.

Voir corrigé 14.79

Exercice 4.41 *Mines 2007*
L'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ défini par

$$\phi : \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{bmatrix},$$

est il diagonalisable ? On envisagera les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Voir corrigé 14.80

Exercice 4.42 *Mines*
Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P(exp(A))$.
2. Montrer que si $exp(A) = exp(B)$, alors $A = B$.

Voir corrigé 14.81

Exercice 4.43 *Vrac*

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A\,B = 0$. Montrer qu'elles ont un vecteur propre commun.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers de degré n, de coefficient de tête $(-1)^n$. L'application $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \to \chi_M \in \mathcal{P}$ est elle surjective ?

Voir corrigé 14.82

Exercice 4.44 *Mines 2007*
Soit $\mathbb{K}$ un corps, n un entier ≥ 2 et $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A;
2. Montrer que A est diagonalisable ssi ses valeurs propres sont distinctes.

Voir corrigé 14.83

Exercice 4.45 *voir aussi l'exercice de topologie n° 4.45*
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe d diagonalisable et h nilpotent tels que $f = d + h$ et $d \circ h = h \circ d$.
Voir corrigé 14.84

Exercice 4.46 *Une application classique où il est pratique d'écrire un polynôme annulateur sous la forme $P(X) = \Pi_A(X)Q(X)$, $\Pi_A(X)$ étant le polynôme minimal de A :*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, la matrice par blocs :

$$B = \begin{bmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{bmatrix}.$$

1. Calculer B^p pour $p \in \mathbb{N}$, puis $P(B)$ lorsque $P(X) \in \mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que si B est diagonalisable, A l'est aussi.
3. Réciproquement, on suppose A diagonalisable. Montrer que B l'est aussi (construire un polynôme annulateur à racines simples tel que $P(X) = \Pi_A(X)Q(X)$ et que $\Pi_A(X)$ divise aussi $P(3A)$).

voir corrigé 14.85

Exercice 4.47
On munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ d'une norme d'algèbre Montrer qu'il n'existe pas de sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ inclus dans la boule de centre I_n et de rayon $1/2$ autre que le sous-groupe trivial $\{I_n\}$.
Voir corrigé en 14.86

Exercice 4.48 *mines 2009*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$. Montrer que A est nilpotente.
Voir corrigé en 14.87

Exercice 4.49 *mines 2009*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Soit $F(X) = \sum a_k X^k$, un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, exprimer $F(B)$;
2. Etudier des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour que B (ou A) soit diagonalisable.

voir corrigé en 14.88

Exercice 4.50
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

1. Résoudre l'équation $exp(M) = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Résoudre l'équation $exp(M) = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Voir corrigé en 14.89

Exercice 4.51 *Mines MP 2016*
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, f(x), f^2(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour lequel $f^n = id$.

1. Exprimer la matrice de f dans la base $(x, f(x), f^2(x))$ et en déduire que le polynôme caractéristique de f est de la forme de la forme $\chi_f(X) = -(X^3 - cX^2 - bX - a)$. Que peut on dire de plus ?
2. Montrer que $\chi_f(X)$ divise $X^n - 1$.
3. Exprimer a, b, c en fonction des valeurs propres et de leurs arguments. En déduire tous les endomorphismes possibles...

Voir corrigé en 14.90

5 Fonctions de la variable réelle, suites numériques

5.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire :

cours de Sup : le théorème de Rolle ex. 5.2, ex. 5.4 ; accroissements finis, formules de Taylor ex. 5.6 ;

développements asymptotiques : exercices 5.5, 5.7 ;

fonctions convexes : ce thème a pris de l'importance avec le nouveau programme, on liste ici quelques exercices (ainsi que le 3.6 avec les déterminants) ;

Ce que dit le rapport d'oral CCP 2007 à ce propos :

— *Lors du calcul d'un DL en 0, la formule*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

ne fait pas partie du registre usuel de certains élèves ; ils préfèrent faire appel à des théorèmes sur les opérations ou sur les fonctions composées qui parfois ne peuvent pas être utilisées.

— *Les développements limités et les DSE usuels sont souvent mal connus.*

— *La notation $o(x^n)$ est souvent mal comprise. Elle est cause d'erreurs lorsque x est remplacé par une quantité "plus compliquée" tendant vers 0.*

— *Calcul : des lacunes surprenantes (relations trigonométriques et calculs de primitives).*

— *L'utilisation des équivalents pour calculer certaines limites en cas d'indétermination est mal comprise (confusion avec l'utilisation d'un DL...). Certains élèves semblent craindre l'utilisation des équivalents.*

5.2 Énoncés

Exercice 5.1 *classique, mines 2015...*

Faisable avec le cours de première année et néanmoins difficile :

comparaisons, études de variations ; raisonnement par condition suffisante : c'est en cela qu'on peut trouver difficile.. C'est typiquement un exercice d'oral : vous devez chercher, avoir des idées, vous battre, ne pas vous précipiter, écouter l'examinateur s'il vous donne un conseil...

On pose, pour $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Racines de f_0, f_1, f_2...
2. Montrer que f_{2n} n'a pas de racine réelle, que f_{2n+1} en possède une exactement (on la note alors r_n).
3. Montrer que $-(2n+3) < r_n$
4. Étudier la monotonie de $(r_n)_n$ et déterminer sa limite.

Voir corrigé 14.91

Exercice 5.2 *classique...*

f est deux fois dérivable sur un intervalle I contenant a, b et c. Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f"(d).$$

Voir corrigé 14.92

Exercice 5.3 *CCP - 2006 ; planches diverses...*
Démontrer que deux suites équivalentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang. Quel est le signe de $\sin\dfrac{1}{n} - \mathrm{th}\dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$?
Voir corrigé 14.93

Exercice 5.4 *CCP analogue à Centrale*

1. Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré n,
$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}.$$
Montrer que si les λ_i sont tous réels, alors $P'(X)$ admet $n-1$ racines réelles distinctes ou non.
2. Montrer que si P et Q sont scindés sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour $P'Q + aPQ'$ lorsque a est un entier naturel.
3. Pour étudier les cas $a > 0$, considérer la fonction
$$f(x) = \ln|P(x)| + \ln(|Q(x)|^a).$$

voir indications ou corrigé 14.94.

Exercice 5.5 *Centrale PSI maths 1.*
Soit f définie par $f(x) = \mathrm{th}(x)\tan(x) - 1$.

1. Montrer que cette fonction admet un zéro et un seul dans chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ pour chaque entier $n > 1$. On note u_n cette racine.
2. Donner un développement asymptotique de u_n.

voir indications ou corrigé 14.95.

Exercice 5.6 *exercice classique*
Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$. On lui associe la suite
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - (n+1)f(0).$$

1. Étudier $(u_n)_n$ lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$
2. Étudier $(u_n)_n$ lorsque f est supposée seulement dérivable, de dérivée continue en 0.

voir indications ou corrigé 14.96.

Exercice 5.7 *CCP PSI-MP (analogues)*
Soit f_n définie par $f_n(x) = n - x + e^{-x}$.

1. Montrer que cette fonction admet un zéro sur $\mathbb{R}$ et un seul.
2. Montrer que ce zéro, noté u_n est compris entre n et $n+1$
3. Donner un équivalent puis un développement asymptotique de u_n.

voir indications ou corrigé 14.97.

Exercice 5.8
Soit $n \geq 2$. On considère le polynôme
$$P_n(X) = X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} X^k.$$

1. Combien admet-il de racines réelles ?
2. Soit x_n la plus grande de ses racines réelles. Donner un majorant de x_n, simple et indépendant de n;
3. Montrer que, pour toute racine complexe z, on a $|z| \leq x_n$.

Voir corrigé 14.98

Exercice 5.9 *MP*
Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

1. Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

   Dans la suite de l'exercice, on considère les solutions de cette équation lorsque $a > e$.

2. Soit x_a une solution de l'équation vérifiant $x_a < e$. En donner un développement asymptotique à trois termes, lorsque a tend vers $+\infty$.
3. Soit y_a une solution de l'équation vérifiant $y_a > e$. En donner un développement asymptotique à deux termes, lorsque a tend vers $+\infty$.

Voir corrigé 14.99

Exercice 5.10 *CCP 2005*
On considère l'équation $x^n + x - 1 = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'elle admet une racine et une seule dans $\mathbb{R}+$.
2. On note x_n cette racine. Montrer que $\lim x_n = 1$.
3. On pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer qu'à partir d'un certain rang
$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq \frac{\ln n}{n}.$$
4. Montrer que $\ln y_n \sim -\ln n$ et que $x_n = 1 - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Voir corrigé 14.100

Exercice 5.11 Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$. On suppose que
$$tf'(t) - f(t) + f(0) \underset{t\to 0}{=} = O(t^2)$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
Voir corrigé 14.101

5.3 Inégalités de convexité

Exercice 5.12 *inégalités de convexité*
Pour $x_1, x_2, ..., x_n$ strictement positifs, montrer les inégalités suivantes en étudiant la convexité ou la concavité de fonctions appropriées :

1. $$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geqslant (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{1/n}$$
2. pour des $\lambda_i \geqslant 0,$ *tels que* $\sum \lambda_i = 1$
$$\sum \lambda_i x_i \geqslant \prod x_i^{\lambda_i}$$

Exercice 5.13 Prouver les énoncés suivants (faites d'abord un dessin) :

1. Pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$.
2. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1 + u \leq e^u$.
3. Pour tout réel $u \in [0, 2\pi]$, $\dfrac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$.

Exercice 5.14
Soit f une fonction convexe et majorée sur R. Montrer que f est constante.

Exercice 5.15 *de l'art du changement de variable*

1. Montrer que, pour tous a, b réels strictement positifs, avec $a+b = 1$, et tous x, y strictement positifs également, $x^a y^b \leqslant ax + by$
2. On suppose que p et q sont deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que pour $u > 0, v > 0$ on a
$$u\,v \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q.$$

Exercice 5.16 *Inégalité de Hölder :*
On suppose que p et q sont deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour toute famille de réels positifs $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\sum \lambda_i = 1$,
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p.$$
2. Inégalité de Hölder :
Avec p et q comme dans la question précédente, montrer que pour des $a_i > 0$, des $b_i > 0$,
$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
Indications : on posera $x_i = \dfrac{a_i}{b_i^{q-1}}$ et $\lambda_i = \dfrac{b_i^q}{\textit{what else?}}$...
3. Lorsque $p = q = 2$ quelle inégalité bien connue obtient-on ? Exprimez la en termes de produit scalaire.

Exercice 5.17

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \ln(1 + e^{nt})$, est convexe
2. Prouver que pour des $\lambda_i > 0$,
$$(1 + \lambda_1 \times ... \times \lambda_n)^n \leq (1 + \lambda_1^n)...(1 + \lambda_n^n),$$

Exercice 5.18
Montrer que, pour λ réel et $x \in [-1,\ 1]$,
$$e^{\lambda x} \leq ch\lambda + xsh\lambda.$$

corrigé dans le poly de cours...

Exercice 5.19 *inégalité de Jensen*

On considère deux fonctions : ϕ que l'on suppose convexe et continue sur $]a, b[$ (en fait toute fonction convexe sur un intervalle ouvert y est continue - démonstration en exo dans le cours -), et $g : [0, 1] \to]a, b[$ également continue.

On se donne une subdivision $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$.

1. On suppose que les λ_i sont positifs et que $\sum \lambda_i = 1$; les $(y_i)_i$ quant à eux sont des réels quelconques appartenant à $]a, b[$. Majorer simplement
$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right).$$
2. Montrer que
$$\phi\left(\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)g(t_i)\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)\phi \circ g(t_i).$$
3. (a) * Justifier qu'il existe m et M tels que, pour tout $t \in [0.1]$,
$$a < m \leq g(t) \leq M < b$$
Plus de trois lignes : pas lu !

   (b) Justifier que $\phi\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right)$ est bien définie.

   (c) Déduire de tout cela la forme élémentaire de l'inégalité de Jensen,
$$\phi\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right) \leq \int_0^1 \phi \circ g(t)\, dt.$$
4. On suppose que, de plus, g est une fonction à valeurs positives. Que peut on dire
$$\ln\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right) \text{ et de } \int_0^1 \ln \circ g(t)\, dt?$$

corrigé dans le poly de cours...

6 Séries numériques

6.1 Résumé séries numériques

6.1.1 Généralités

Définition 6.1 — Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série de terme général u_n, la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

— On dit aussi que la suite $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de la série ;
— On dit que la série de terme général u_n converge, lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_n$, converge. Sa limite notée

$$S = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k,$$

est la somme de la série.
— Dans le cas contraire, la série est dite divergente.
— On dit que deux séries sont de même nature si elles sont simultanément convergentes ou divergentes.
— lorsque la série de terme général $(u_k)_{k\geq k_0}$ converge et a pour somme

$$S = \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k,$$

on définit pour $n \geq k_0$, son **reste** à l'ordre n comme la différence

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Une conséquence immédiate est que, **pour qu'une série converge, il faut que son terme général ait pour limite 0.** Cette condition n'est en rien suffisante. Lorsqu'elle n'est pas remplie, on dit que la série est **grossièrement divergente.**

Théorème 6.1 On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série des modules est convergente et toute série numérique absolument convergente est également convergente. De plus

$$|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|.$$

Théorème 6.2 critère des séries alternées
Soit $\sum u_k$ une série alternée, telle que, de plus,
— $(|u_n|)_n$ est une suite décroissante
— $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,
alors
— la série $\sum u_k$ est convergente
— les suites S_{2n} et S_{2n+1} des sommes partielles d'ordres $2n$ et $2n+1$ sont adjacentes et encadrent la somme de la série $\sum u_k$
— le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}$ vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

6.1.2 Séries à termes positifs

Théorème 6.3
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Pour que $\sum u_n$ converge il suffit que la suite des sommes partielles soit bornée.

Théorème 6.4
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
- si $(0 \leq) u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang,
- si $\sum v_n$ converge,

alors $\sum u_n$ converge également.

Théorème 6.5
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
- si $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$
- si $\sum v_n$ converge,

alors, $\sum u_n$ converge également et de plus, les restes des deux séries sont comparables :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right).$$

Théorème 6.6 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ alors, les deux séries sont de même nature.
- si elles convergent leurs restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

- si elles divergent leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

6.1.3 Séries et intégrales

Théorème 6.7 Soit f une fonction positive continue par morceaux, décroissante sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$, alors :
- pour tous m, n tels que $n \geq m \geq n_0$,

$$\int_m^{n+1} f(t)\ dt \leq \sum_{p=m}^{n} f(p) \leq \int_{m-1}^{n} f(t)\ dt;$$

— La série de terme général $u_n = f(n)$, converge ssi la fonction

$$x \to \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt$$

admet une limite en $+\infty$.

— Si la série converge, alors

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} f(p) \leqslant \int_{n}^{\infty} f(t)dt$$

— Si la série diverge, alors

$$\sum_{p=n_0}^{n} f(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

Théorème 6.8
Soit f une fonction positive, continue par morceaux, décroissante sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$, alors :

— la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\ dt - f(n) = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\ dt$$

est convergente.

— si la série $\sum f(p)$ converge, ou si $x \to \int_0^x f(t)\ dt$ admet une limite en $+\infty$, alors :

$$\sum_{p=n_0+1}^{+\infty} w_p = \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ dt - \sum_{p=n_0+1}^{+\infty} f(p).$$

La constante d'Euler On considère la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$, déjà rencontrée, dont nous avons prouvé qu'elle divergeait. On se propose ici d'étudier son comportement asymptotique avec plus de précision. On notera

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

— Montrer que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

— Montrer qu'il existe un réel γ[6] tel que $H_n = ln(n) + \gamma + o(1)$.

Séries de Riemann On appelle série de Riemann une série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Les résultats sont à connaître.

Théorème 6.9

— si $\alpha \leq 0$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, est grossièrement divergente.

— si $0 < \alpha \leq 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, est divergente.

6. C'est une notation usuelle, ce nombre est la constante d'Euler. Ces résultats sont dus à Euler et datent de 17... Pourtant, on ne sait toujours pas si γ est rationnel ou pas, question que l'on se pose depuis cette époque

— si $0 < \alpha < 1$, les sommes partielles vérifient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

— si $\alpha = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} ln(n)$$

— si $1 < \alpha$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, est convergente. Son reste à l'ordre n vérifie

$$R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Séries de Bertrand (exemples) Ce sont les séries de la forme

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta},\ \frac{1}{n^\alpha ln(n)^\beta \ln(\ln(n))^\gamma},\ etc...$$

Elles interviennent de façon classique. Les méthodes sont à connaître.

Exercice 6.1 *Exemples de séries de Bertrand*

1. $\sum_k \frac{1}{k\ln(k)}$
2. $\sum_k \frac{1}{k\ ln^\beta(k)}$
3. $\sum_k \frac{1}{k^\alpha ln^\beta(k)}$
4. Enoncer une cns de convergence.

6.1 *6.1*

6.1.4 Critère de d'Alembert.

Théorème 6.10 *comparaison logarithmique*
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels positifs. Si à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

alors $u_n = O(v_n)$.
En particulier, si $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison r, on obtient $u_n = O(r^n)$.

Corollaire 6.1 *Règle de d'Alembert*
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ admet une limite. Alors :

— si cette limite vérifie $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $\sum u_n$ converge ;
— si cette limite vérifie $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $\sum u_n$ diverge ;

Remarque : si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on se gardera de conclure trop vite.

6.1.5 Produit de Cauchy et exponentielle complexe

Définition 6.2 *produit de deux séries*
Soient $sumu_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries, la série de **terme général**

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n}^{n} u_p v_q.$$

Théorème 6.11 Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy est une série absolument convergente et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n}^{n} u_p v_q \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right).$$

Pour tout z complexe, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. On définit immédiatement une fonction **prolongeant** *exp* déjà définie sur $\mathbb{R}$, à $\mathbb{C}$, en posant pour z complexe :

$$exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette fonction, appelée **exponentielle complexe** vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 6.1 *l'exponentielle complexe est aussi un homomorphisme de groupes*

— L'application *exp* ci-dessus définie vérifie

$$exp(u + v) = e^{u+v} = e^u e^v = exp(u)exp(v).$$

— $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$.
— Pour tout $z = x + iy$ avec x et y réels,

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

— *exp* est surjective, non injective. Son noyau (comme homomorphisme de groupe) est l'ensemble des complexes de la forme $2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

6.1.6 Conseils pour étudier une série numérique...

1. on commence par s'assurer qu'elle n'est pas **grossièrement divergente,**
2. si ce n'est pas le cas (et parfois aussi, si c'est le cas et que l'on veut étudier le comportement asymptotique des sommes partielles) on regarde ce que donnent les théorèmes du cours :
   (a) **série à termes positifs ou de même signe :** comparaison à une série de référence, à une intégrale, règle de d'Alembert si son allure s'y prête...
   (b) **si la série est alternée,** vérifier les 3 hypothèses du critère spécial ;
   (c) **regarder les modules,** ce peut-être une série **absolument convergente,** c'est le cas des séries en $O(v_n)$ où $\sum v_n$ est une série positive convergente...
3. Si ces critères ne sont pas immédiats, penser à développer le terme général. On pourra alors étudier la série comme une sommes de séries au comportement facile à étudier... A cet égard réfléchir aux exemples suivants :
   — si $u_n = \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$, la série diverge. Pourquoi ?
   — si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$, la série peut être convergente ou divergente ; illustrer les deux cas.
   — si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + \dfrac{1}{n^{3/2}} + O(\dfrac{1}{n^2})$, la série converge. Pourquoi ?
4. On n'oubliera pas non plus d'utiliser la formule de Taylor etc..
5. On pensera aux séries de fonctions : séries entières , séries d'intégrales

6.1.7 A connaître :

$\sum_{n\geq 1} q^n = \dfrac{1}{1-q}(\lvert q\rvert < 1)$ *géométrique*	$n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ *Stirling*
$\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ $converge \Leftrightarrow \alpha > 1$	$\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $converge \Leftrightarrow \alpha > 0$
$\sum_{n=1}^N \dfrac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$ (γ *cste d'Euler*)	$\dfrac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$
$\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$	$\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$

6.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire :

critères de convergence la situation est bien balisée :

- comparaison de séries à termes positifs : termes de signe constant et équivalents, majoration ou minoration - preuve de divergence-, comparaison à une intégrale - cas d'un terme général $f(n)$ avec $f \searrow$.
- critère des séries alternées (voir ex . 6.5).
- développement du terme général pour se ramener à des sommes de séries de comportement connu

compléments de cours utiles en concours * transformation d'Abel 6.17 ;

Ne pas oublier les dominos, les produits infinis :3.3n 3.3

calcul effectif des sommes penser à introduire une série entière (voir ex . 6.11), une série d'intégrales (voir ex . 6.11) , à regrouper judicieusement les termes (voir ex . 6.6), au principe des dominos (voir ex . 6.9, 6.2, 6.3) .

sommes de Riemann on ne les confondra pas avec les séries, de même que les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k}$! Voir l'exercice 6.12 par exemple.

6.3 Énoncés

Exercice 6.2 *mines PC 2015*

$\boxed{\textit{Feu de tout bois.}}$ *Cherchez, jouez, soyez clair (ne confondez suite et série par exemple). Se fait sans les mains mais avec des idées (écrivez quand même, mieux vaut que l'examinateur vous comprenne). On réfléchira à la question « $(u_n)_n$ est bien définie ».*

$(a_n)_n$ est une suite de réels positifs ou nuls. On se donne $u_0 > 0$ et on pose $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$.

Monter que $(u_n)_n$ est bien définie et que la **série** $\sum a_n$ converge si la **suite** (u_n) converge. Réciproque ?

voir indications ou corrigé **??**

Exercice 6.3 *centrale MP 2015*

$\boxed{\textit{Raisonnement de type algébrique, techniques de base sur les séries.}}$ *Il suit le précédent....*

Quelles sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ continues en 0 et telles que

$$f(2x) - f(x) = \ln(1 + x^2)?$$

voir indications ou corrigé **??**

Exercice 6.4 CCP PSI

Discuter suivant la valeur du réel α de la nature de la série

$$\sum \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1 \right)^{\alpha}.$$

voir indications ou corrigé 14.102

Exercice 6.5 *CCP*
On considère les séries de termes généraux

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ et } v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

1. Montrer que ces séries convergent
2. Montrer qu'elles ont la même somme.

voir indications ou corrigé 14.103

Exercice 6.6 *CCP*
Étudier la convergence de la série de terme général

$$\begin{cases} u_n = -4/n, & \text{si 5 divise n}\,; \\ u_n = 1/n, & \text{sinon.} \end{cases}$$

voir indications ou corrigé 14.104

Exercice 6.7 *CCP*
Étudier, en fonction de $r > 0$, la convergence de la série de terme général

$$\int_0^{\frac{1}{n^r}} \sin^r x\; dx,$$

voir indications ou corrigé 14.105

Exercice 6.8 *CCP*
Étudier, en fonction de $\alpha > 0$, la convergence de la série de terme général

$$\frac{1}{n^\alpha}\int_n^\infty \frac{1}{\sqrt[6]{x^7+1}}\, dx.$$

voir indications ou corrigé 14.106

Exercice 6.9 *CCP (remanié)*
Soient $(u_n)_n$ une suite à termes strictement positifs.

1. Comparez les convergences des séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$;
2. Comparez les convergences des séries $\sum u_n$ et du produit $\prod(1+u_n)$;
3. Comparez les convergences des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où

$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=0}^n (1+u_k)};$$

voir indications ou corrigé 14.107

Exercice 6.10 *mines*
Soient $f : [1, +\infty[\to]0, +\infty[$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

1. Etudiez la nature de la série $\sum f(n)$
2. Donnez un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^\infty f(n)$.

voir indications ou corrigé 14.108

Exercice 6.11 *mines, chaque question est un exo*

1. Étudiez la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{3^n(2n+3)}$ et calculer sa somme le cas échéant ;
2. Étudiez la nature de la série $\sum \dfrac{1}{3^n(3n+2)}$ et calculer sa somme le cas échéant ;
3. Étudiez la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(3n+1)}$ et calculer sa somme le cas échéant ;
4. Étudiez la nature de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{(3n+1)^\alpha}\right)$ et calculer sa somme le cas échéant ;

indication : $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\dfrac{1}{n+1}\right]_0^1$.

voir indications ou corrigé 14.109

Exercice 6.12 *Centrale PC 2002*

Soit $\alpha \geq 0$. On définit une suite en posant

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+(n-k)^2}.$$

1. Donner un équivalent de u_n;
2. A quelles conditions la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Voir corrigé 14.110

Exercice 6.13 *CCP-MP*

On considère les deux suites définies par

$$u_n = \frac{1}{3^n n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2) \text{ et } v_n = \frac{1}{n^{3/4}}.$$

1. Montrer, qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$
2. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Voir corrigé 14.111

Exercice 6.14 *mines MP - 2005*

1. Nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.
2. Que pensez vous de l'énoncé suivant *(posé avec le précédent dans un lot de 3 exos d'après OT n° 97).* "Montrer qu'une série de terme général positif u_n telle que

   $$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_k$$

   converge."
3. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $\sum v_n$ de terme général

   $$v_n = \frac{1}{1+u_n}.$$

   Montrer que si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ diverge ; Réciproque ?

4. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $\sum v_n$ de terme général

$$v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}.$$

Montrer que si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ diverge ; Réciproque ? *Commencer avec* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$

5. Soit $u_n = \ln n + (-1)^n n^p$, $p \in \mathbb{R}$. Nature de la série $\sum u_n$, de la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$?

6. Nature de la série de terme général $\dfrac{\cos \ln n}{n}$?

Voir corrigé 14.112

Exercice 6.15 $\star$

On se propose d'étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Que dire lorsque $\alpha > 1$?
2. On suppose ici $1/2 < \alpha \leq 1$. Introduire la série de terme général

$$v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\, dt,$$

et étudier $\sum u_n$.

3. On étudiera le cas $\alpha = 1/2$ à l'aide d'un développement asymptotique de

$$e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}.$$

4. Montrer enfin, toujours en utilisant le 3°, que la série diverge lorsque $\alpha < 1/2$.

Voir corrigé 14.113

Exercice 6.16 *Centrale MP*

Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Étudier la convergence des deux séries $\sum f(n)$ et $\sum (-1)^n f(n)$. Préciser un équivalent de la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Calculer pour chacune de ces séries une valeur approchée des sommes partielles d'ordre 10, 100, 1000, 10 000 ... Comment vérifier numériquement l'équivalent trouvé ?

2. Montrer la convergence de la série de terme général

$$w_n = f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt.$$

3. Après avoir étudié la différence

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k),$$

déterminer la somme $\sum_{n\geq 1} (-1)^n f(n)$.

Voir corrigé 14.114

Exercice 6.17 *Méthode d'Abel*

On décrit ici un procédé classique d'étude de séries de la forme $\sum a_p v_p$ où :
- la suite $(a_p)_p$ est une suite de termes positifs, décroissante de limite 0,
- la suite de complexes $(v_p)_p$ admet des sommes partielles bornées.

Les séries alternées $\sum(-1)^p a_p$, mais aussi les séries $\sum \dfrac{e^{ip\theta}}{n^\alpha}$, sont de ce type pour $\alpha > 0, \theta \not\equiv 0[\pi]$. On pourra tenter de justifier leur convergence avec les moyens standards du cours. Ce n'est point là mince affaire. On notera

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k v_k$$

1. Montrer que $S_n = a_0 v_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(T_k - T_{k-1})$
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(T_k - T_{k-1}) = a_n T_n - a_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})T_k$
3. On suppose que $(T_n)_n$ est bornée et que $(a_k)_k$ décroit vers 0. Déduire de ce qui précède que $(S_n)_n$ converge.

7 Espaces normés et topologie

7.1 Résumé

7.1.1 Généralités : limites, normes équivalents, topologie

Définitions :
• Une norme sur un $\mathbb{K}-$ev E est une application $\mathcal{N} : E \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que :

1. $\mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$
3. $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$.

• Un espace normé est un couple $(E, \mathcal{N})$, formé d'un ev et d'une norme sur E.
• On dit qu'une suite d'éléments $(x_n)_n$ d'un espace normé $(E, || \, ||)$ est convergente de limite $l \in E$, ssi $\lim_{n\to\infty} ||x_n - l|| = 0$, ou, ce qui est équivalent :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \Rightarrow ||x_n - l|| \leq \varepsilon.$$

• On dit que deux normes sur un ev E, $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes s'il existe des réels strictement positifs α, β, tels que $\forall X \in E$, $\alpha \mathcal{N}_2 \leq \mathcal{N}_1 \leq \beta \mathcal{N}_2$.

Propriétés :
• On retiendra l'inégalité triangulaire sous la forme équivalente :

$$\boxed{|\, ||x|| - ||y|| \,| \leq ||x - y|| \leq ||x|| + ||y||.}$$

• Une suite d'éléments de l'evn (E, N) converge vers au plus une limite.

Théorème 7.1 *convergence des suites pour des normes différentes*
Soit E un ev muni de normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$.
• Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. Toute suite $\mathcal{N}_1-$convergente est $\mathcal{N}_2-$convergente
2. Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\mathcal{N}_2 \leq \alpha \mathcal{N}_1$.

• Si $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, sont des normes **équivalentes** pour toute suite $(x_n)_n$, d'éléments de E alors, $(x_n)_n$ converge vers ℓ pour $\mathcal{N}_1$ ssi elle converge vers ℓ pour $\mathcal{N}_2$.

Définitions Soit $(E, || \, ||)$, un espace normé.

1. On appelle **boule fermée** de centre Ω, de rayon $r > 0$, l'ensemble

$$\bar{B}(\Omega, \, r) = \{x \in E; \ ||x - \Omega|| \leq r\}.$$

2. De la même façon, la **boule ouverte** de centre Ω, de rayon $r > 0$, est l'ensemble $B(\omega, \, r) = \{x \in E; \ ||x - \Omega|| < r\}$.
3. Si D une partie de E, $a \in E$, on dit que a est un **point adhérent** à D ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \, B(a, \, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset.$$

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit aussi que $+\infty$ est adhérent à D ssi

$$\forall M > 0, D \cap \,]M, \, +\infty[\neq \emptyset.$$

4. On note $\bar{D}$ ou $\mathrm{adh}(D)$, l'ensemble des points adhérents à D **(adhérence de D)**.

5. D est **dense** dans E ssi $\bar{D} = E$.
6. Soit D, une partie de E, et $a \in E$; on dit que a est un **point intérieur** à D ssi :

$$\exists r > 0,\ B(a,\ r) \subset D.$$

   On note de façon analogue D^o **l'intérieur de D.**
7. Une partie D de E est un **ouvert** de $(E, ||\ ||)$ ssi pour tout $a \in D$, il existe $\delta > 0$ tel que la boule $B(a,\ \delta)$ soit contenue dans D.
8. Une partie F de E est un **fermé** de $(E, ||\ ||)$ ssi son complémentaire est un ouvert.
9. Soit $a \in E$, un **voisinage** de a dans E est une partie de E qui contient une boule ouverte de centre a;
10. la **frontière** d'un ensemble A est l'ensemble des points adhérents qui ne sont pas des points intérieurs, elle est parfois notée ∂A.

Propriétés Dans un espace normé $(E, ||\ ||)$,
1. une boule ouverte est un ouvert,
2. une boule fermée est un fermé,
3. une réunion quelconque, un intersection **finie** d'ouverts sont des ouverts,
4. une intersection quelconque, une réunion **finie** de fermés sont des fermés,
5. un ensemble est ouvert ssi il est voisinage de chacun des ses points.
6. un point a de E est adhérent à A ssi il existe une suite de points de A qui converge vers a.
7. un ensemble $A \subset E$ est fermé ssi pour toute suite convergente, $(x_n)_n$, formée d'éléments de A, $\lim x_n \in A$.

7.1.2 Fonctions continues

Définitions
Soient $(E, \mathcal{N})$ et $(F, ||\ ||)$, deux espaces normés et $f : D \subset E \to F$, une application.
1. On dit que f est **continue** en $a \in D$ ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. On dit que f est **uniformément continue** sur D ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, y) \in D^2,\ \mathcal{N}(x - y) \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| \leq \varepsilon.$$

3. On dit que f est **lipschitzienne** sur D s'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in D^2,\ ||f(x) - f(y)|| \leq K\mathcal{N}(x - y).$$

Théorème 7.2 *caractérisation séquentielle de la continuité*
• Une fonction $f : D \subset E \mapsto F$ est continue en $a \in D$ ssi pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de D convergeant vers a on a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Théorème 7.3
Soit f une application continue de l'espace normé $(E, \mathcal{N})$ à valeurs dans $(F, ||\ ||)$. Pour toute partie Ω de F on note $f^{-1}(\Omega) = \{x \in E;\ f(x) \in \Omega\}$.
1. Si Ω est un ouvert de F, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E.

2. Si Ω est un fermé de F, $f^{-1}(\Omega)$ est un fermé de E.

Théorème 7.4
Soit f une application continue **sur une partie** D de l'espace normé $(E, \mathcal{N})$ à valeurs dans $(F, || \ ||)$.
Pour toute partie Ω de F on note $f^{-1}(\Omega) = \{x \in E;\ f(x) \in \Omega\}$.

1. Si Ω est un ouvert de F, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert **relatif** de D (ie : l'intersection de D et d'un ouvert de E).
2. Si Ω est un fermé de F, $f^{-1}(\Omega)$ est un fermé **relatif** de D (ie : l'intersection de D et d'un fermé de E).

7.1.3 Espaces vectoriels normés en dimension finie

On suppose ici que E est de dimension N et qu'il admet pour base la famille $(e_i)_{1\leq i\leq N}$. On note $(X_n)_n$ une suite d'éléments de E avec

$$X_n = \sum_{i=1}^{N} x_n^{(i)} e_i.$$

Théorème 7.5
Soit $(x_n)_n$, une suite de E ev de dimension finie.
• Si les N suites des composantes dans une vase B, $(x_n^{(i)})_n$, sont convergentes, de limites respectives l_i, alors pour toute norme $\mathcal{N}$ sur l'ev E, la suite (X_n) est $\mathcal{N}-$convergente de limite :

$$L = \sum l_i e_i.$$

• Réciproquement, si la suite $(X_n)_n$ d'éléments de E, evn de dimension finie, converge vers L pour une norme $\mathcal{N}$, alors, dans une base quelconque, les suites des composantes $(x_n^{(i)})$, convergent dans $\mathbb{K}$ vers les coordonnées correspondantes L_i de L.

Théorème 7.6 *équivalence des normes en dimension finie*
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Remarque : En dimension finie, les suites convergentes, les fonctions continues, les ouverts, les parties bornées, les fermés, les parties denses, la continuité, les limites... ne dépendent pas de la norme. On n'a donc pas à préciser pour quelle norme une suite converge et la locution "espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$" a un sens. Par contre les boules sont attachées à la norme qui les définit.
Attention, ce résultat est *toujours faux* en dimension infinie.

Théorème 7.7 *de Bolzano Weierstrass*
Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 7.8 *caractérisation des fonctions continues*
• Lorsque E est de dimension finie, les fonctions coordonnées dans une base $(e_i)_i$ quelconque,

$$X_i := x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \to x_i \in \mathbb{K},$$

sont des fonctions continues.
• Soit f une application de E normé (de dimension qque) dans F normé et de dimension finie, a un point de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :
— f est continue en a
— il existe une base $(e_j)_j$ de F dans laquelle les fonctions composantes de f sont continues en a;
— dans toute base de F, les fonctions composantes de f sont continues en a.
Rappelons que les fonctions composantes de f dans $(e_j)_j$, sont les fonction f_j définies par

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) e_j.$$

Théorème 7.9 *applications linéaires*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le même corps. Si E est de dimension finie, les applications linéaires de E dans F sont des fonctions continues.

7.1.4 Les compacts

Définition Une partie K de l'evn $(E, || \, ||)$ est compacte ssi toute suite d'éléments de K admet une valeur d'adhérence dans K.
Propriétés
• un compact est fermé et borné (réciproque fausse en dim infinie) • L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.
• Une une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
• Une fonction continue sur un compact est uniformément continue (théorème de Heine).

Théorème 7.10
Dans un evn de dimension finie un ensemble non vide est compact ssi il est fermé et borné.

7.2 Caractérisation des applications linéaires continues

Théorème 7.11 Soient $(E, || \, ||_E)$ et $(F, || \, ||_F)$, deux espaces normés et f une application linéaire de E dans F. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue,
2. f est continue en 0,
3. il existe $M > 0$, tel que pour tout $x \in E$, $||f(x)||_F \leq M||x||_E$;
4. il existe $M > 0$, tel que pour tout $x, \ y \in E$, $||f(x) - f(y)||_F \leq M||x - y||_E$, (ie : f est $M-$lipschitzienne).

7.3 Ce qu'il faut connaître et savoir faire :

• **Extrait du rapport CCP 2015 : Topologie**
La topologie est officiellement au programme!!!
La topologie reste une discipline abstraite et les examinateurs en sont conscients.
Les exercices proposés sont souvent des démonstrations de cours ou des applications quasi-immédiates du cours. Mais pour pouvoir traiter un exercice de topologie, il faut avant tout connaitre ses définitions, savoir faire correctement une démonstration ***en manipulant rigoureusement les quantificateurs...*** *Par exemple, rappelons qu'il est important de savoir écrire avec des quantificateurs, la définition de* ***la borne supérieure (ou inférieure)*** *d'une partie, lorsqu'elle existe.*

Topologie de $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, fonctions continues et suites...
Revoir dans le chapitre Topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les exercices sur les suites $x_{n+1} = f(x_n)$, l'exercice sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$. Au niveau Mines-Centrale voir les exercices sur suites et densité 7.11, 7.15. On pourra aussi voir le bel exercice 2.27* sur les groupes finis d'homéomorphismes de $\mathbb{R}$, au chapitre Algèbre générale (avec indications sous le n° 2.28).

Espaces normés en dimension finie caractérisation de la convergence des suites (7.12, 7.13), normes équivalentes, continuité des applications linéaires (7.3, 7.4,)

Topologie des espaces de matrices exercices 7.6, 7.7, 7.8, 7.9...

7.4 Énoncés

Tout d'abord les exercices basiques de la banque CCP!

Exercice 7.1 *questions brèves*

1. Pourquoi la fonction $det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, est elle continue?
2. Pourquoi $GL_n(\mathbb{K})$ est il ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
3. Pourquoi $O_n(\mathbb{R})$ est-il compact?
4. Montrer que dans espace vectoriel normé, un sev de dimension finie est un fermé.
5. Montrer que dans espace vectoriel normé, un sev contenant une boule ouverte est l'espace tout entier.
6. (mines 2004) Soit F un sev fermé d'un evn E et D une droite de E. Montrer que $F + D$ est un sev fermé de E. Généraliser à D de dimension finie.

voir indications ou corrigé 14.115

Exercice 7.2 *séries dans l'espace normé $\mathcal{L}(E)$ (proche d'exercices de la banque CCP)*
On suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie et on considère une norme sur $\mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout couple (u, v),d'endomorphismes de E,

$$|||u \circ v||| \leq |||u||||||v|||.$$

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge. Soit $E(u)$ sa limite; montrer que
$$E(v^{-1} \circ u \circ v) = v^{-1} \circ E(u) \circ v,$$
pour tout isomorphisme v et tout endomorphisme u.
2. Montrer que si $|||u||| < 1$, alors $id_E + u$ est inversible, calculer son inverse.

voir indications ou corrigé 14.116

Exercice 7.3 *CCP 2003*
On considère l'espace C des suites complexes convergentes, on le munit de la norme $||u|| = \sup |u_n|$. Soit L l'application qui à une suite $u \in C$ associe sa limite.

1. Montrer que L est linéaire et continue ;
2. Calculer sa norme subordonnée ;

voir commentaire 14.117

Exercice 7.4 *Mines 2016 (énoncé ODT modifié pour qu'il rentre dans le programme)*
On considère l'espace C des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme $||u||_\infty$. On pose pour $u \in C$,

$$\phi(u) = \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \int_{1/2}^1 u(t)\,dt.$$

1. Montrer que ϕ est continue.
2. Existe-t-il une fonction $f \in C$, non nulle, telle que $|\phi(f)| = ||f||_\infty$?
3. Même question lorsqu'on considère les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Voir corrigé 14.118

Exercice 7.5 *Mines 2016*
Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension finie et A une partie compacte de E.
On appelle hyperplan d'appui de A tout hyperplan affine d'équation $u(x) = \alpha$ (avec $u \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$), tel que $\begin{cases} H \cap A & \neq \emptyset \\ A & \subset \{x/u(x) \geq \alpha\}. \end{cases}$ A est donc contenu dans un demi-espace de frontière H.

1. Question non posée : faites un dessin pour chaque définition, chaque question.
2. On note $\delta = \sup\limits_{(x,y)\in E^2} ||x - y||$, le diamètre de A. Montrer qu'il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $||a - b|| = \delta$.
3. Montrer que si H et H' sont deux hyperplans d'appui de A, $d(H, H') \leq \delta$.
4. Soit B une boule ouverte de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une forme linéaire sur E telle que $\forall x \in B, u(x) > 0$.
5. Monter qu'il existe deux hyperplans d'appui de A, H et H' passant respectivement par a et par b. Montrer que $d(H, H') = \delta$.

Voir commentaire 14.119

Exercice 7.6 On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. Calculer les puissances de A;
2. Déterminer la limite de la suite $(C_n)_n$ où $C_n = \dfrac{1}{n+1}(I_n + A + A^2 + ... + A^n)$.

Voir corrigé 14.120

Exercice 7.7

1. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme que l'on suppose unitaire et de degré $n > 0$. Montrer que si $P(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \;\; |P(z)| \geq |Imz|^n.$$

2. Montrer la réciproque.
3. Soit $(A_n)_n$ une suite convergente de matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Que peut on dire de sa limite ?
4. Soit $(A_n)_n$ une suite convergente de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Que peut on dire de sa limite ?
5. Soit $(A_n)_n$ une suite convergente de matrices semblables à une même matrice A de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Que peut on dire de sa limite, lorsque A est diagonalisable, dans le cas général ?

voir indications ou corrigé 14.121

Exercice 7.8

1. Soit E un $\mathbb{R}-$e.v. de dimension N et de base $(e_i)_{1\leq i\leq N}$. Soit f, l'endomorphisme de E, vérifiant :
$$f(e_i) = e_{i+1} \text{ pour } i = 1, ..., N-1 \text{ et } f(e_N) = -e_1.$$
   (a) Montrer que f n'est pas diagonalisable. Calculer sa trace.
   (b) Soit $|| \ ||$, une norme sur E. On définit une norme sur $\mathcal{L}(E)$ en posant, pour $u \in \mathcal{L}(E)$,
$$|||u||| = \sup \frac{||u(x)||}{||x||}.$$
   Montrer qu'il existe une boule de $\mathcal{L}(E)$ de centre f ne contenant aucun endomorphisme diagonalisable. On pourra raisonner par l'absurde, en considérant une suite $(g_n)_n$ d'endomorphismes diagonalisables convergeant vers f et en comparant les traces par exemple.
2. Montrer que si E est un $\mathbb{C}-$e.v. de dimension finie, les endomorphismes diagonalisables forment un sous-ensemble dense de $\mathcal{L}(E)$.

Voir corrigé en 14.122

Exercice 7.9 *Cen ?*
Soir E l'ev des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant
$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt.$$
2. Cette norme est elle comparable à la norme de la convergence uniforme ?

Voir corrigé 14.123

Exercice 7.10
Soit V un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $C = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n);\ f(V) \subset V\}$.

1. Montrer que C est également compact ;
2. Montrer que tout élément de C à un déterminant inférieur à 1.

Voir corrigé 14.124

Exercice 7.11 *mines, planches diverses, exos de natures diverses*

1. Montrer la densité dans $[-1, 1]$ de la famille $(\cos \ln n)_{n\in\in\mathbb{N}^*}$.?
2. (a) Montrer que l'équation $nx^{n+1} - (n + 1)x^n = 1$ admet un solution positive et une seule ;
   (b) On note x_n cette solution ; étudier la suite $(x_n)_n$.

Voir corrigé 14.125

Exercice 7.12 *plus dur que CCP*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une CNS pour que $\lim M^k = 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Voir corrigé 14.126

Exercice 7.13 *CCP*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier la convergence de $\sum \frac{1}{k!} M^k$.
2. Déterminer la limite lorsque $M = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Voir corrigé 14.127

Exercice 7.14 *Centrale 2005*
Soit $p \in \mathbb{N}$. F_p est l'ev des fonctions polynômiales, de degrés $\leq p$, de $\mathbb{R}$ dans lui même. On suppose que $(P_n)_n$ est une suite de fonctions de F_p qui converge simplement sur un intervalle non vide et non réduit à un point.

1. Montrer que $(P_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(P_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Que dire de la limite ?
3. Montrer que ces propriétés sont fausses lorsqu'on se place dans l'espace des fonctions polynômiales de degrés quelconques.

Voir corrigé 14.128

Exercice 7.15 *X - 2007*
Montrer que l'ensemble $\{m + \ln n / m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Voir corrigé 14.129

Exercice 7.16
Soit E un $\mathbb{K}-$evn. Montrer qu'une forme linéaire sur E est continue ssi $Keru$ est un fermé de E.

8 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

8.1 Résumé de cours

Définition 8.1 Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}-$ev E est une application

$$\phi(x,y) \in E^2 \to \phi(x,y) =< x|y >\in \mathbb{K},$$

telle que
- pour tout $(x,y) \in E^2$, $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ (symétrie) ;
- ϕ est linéaire à gauche ;,
- ϕ est positive, en ce sens que, pour tout $x \in E$, $\phi(x,x) \geq 0$,
- ϕ est une forme linéaire "définie" en ce sens que pour tout $x \in E$,

$$\phi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

On dit qu'un espace muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien, un espace euclidien s'il est de dimension finie.

Théorème 8.1 *inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski*
• Soit E un $\mathbb{K}-$ev muni d'un produit scalaire ϕ, alors

$$|\phi(x,y)|^2 \leq \phi(x,x)\phi(y,y),$$

l'égalité ayant lieu ssi x et y sont liés par une relation $x = ty$ ou $y = tx$, t réel.
• En notant $||x|| = \sqrt{\phi(x,x)}$, on a, Pour tout couple $(x,y) \in E^2$,

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

• L'application $x \in E \to ||x|| = \sqrt{\phi(x,x)}$ est une norme sur E.

• Le procédé d'orthogonalisation de Gram Schmidt

Théorème 8.2 Soit E un espace préhilbertien de dimension quelconque et $\mathcal{B} = (b_i)_{1\leq i\leq n}$, une famille libre de E. Il existe alors une famille orthonormale $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, telle que, pour tout p

$$vect(e_1,...,e_p) = V_p = vect(b_1,...,b_p);$$

la base orthonormale de V_n est donc adaptée au drapeau $(V_p)_{1\leq p\leq n}$.

Démonstration et description de l'algorithme :
On commence par construire par récurrence sur p, une famille orthogonale adaptée à la suite de sev $(V_p)_{1\leq p\leq n}$.
• On pose $e'_1 := b_1$. On a $vect(e'_1) = V_1$.
• On suppose construite une famille $(e'_i)_{1\leq i\leq p}$ orthogonale et telle que $vect(e'_1,...,e'_i) = V_i$ pour $1 \leq i \leq p$; On pose alors

$$e'_{p+1} = b_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{p+1,i} b_i.$$

Le produit scalaire $< e'_{p+1}|e'_j >$ est nul ssi pour tout

$$\alpha_{p+1,\,j} = -\frac{< b_{p+1}|e'_j >}{< e'_j|e'_j >}.$$

On choisit ces valeurs pour les $\alpha_{p+1,i}$.

• **Bilan :** la famille définie par $e'_1 = b_1$, et $e'_p = b_p - \sum_{i=j}^{p} \dfrac{< b_p|e'_j >}{< e'_j|e'_j >} b_j$, pour $p \geq 2$, est donc orthogonale et pour tout p, $V_p = vect(e_1, ..., e_p)$.

Théorème 8.3 Soit $(E, < \mid >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

— si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de F, la projection orthogonale de E sur F a pour expression :

$$p_F : x \rightarrow \sum_{i=1}^{n} < x|e_i > e_i.$$

— Quelque soit la dimension de E, p_F est une application continue et $||p_F(x)|| \leq ||x||$.

— En particulier, pour tout $x \in E$,

$$||p_F(x)||^2 = \sum_{k=1}^{n} | < x|e_k > |^2 \leq ||x||^2;$$

c'est l'inégalité de Bessel.

Théorème 8.4 *supplémentaire orthogonal*
Soit E un espace préhilbertien (de dimension quelconque) et F un sev de dimension fini de E. On a $F \oplus^{\perp} F = E$.

• **Topologie des espaces préhilbertiens**

Théorème 8.5
Soit E un espace préhilbertien muni de la norme $||f||_2 =< f|f >^{1/2}$. On a les propriétés suivantes :

1. les formes linéaires $\phi_y : x \rightarrow < x|y >$ sont continues ;
2. pour toute partie X de E, ${}^{\perp}X$ est un sev fermé de E;
3. si F est un sev de E, ${}^{\perp}({}^{\perp}F)$ est l'adhérence de F dans E;
4. la projection orthogonale sur un sev de dimension finie est continue.

Définition 8.2 *suites orthonormales*
Soit $(E, < \mid >)$ un espace préhilbertien.

— Une suite $(e_n)_n$ d'éléments de E est **orthonormale** ssi pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{cases} < e_n|e_m > & = 0 \text{ si } m \neq n \\ < e_n|e_n > & = 1 \end{cases}$$

— Une suite orthonormale $(e_n)_n$ est **totale** ssi pour tout $x \in E$,

$$x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} < x|e_n > e_n = \sum_{n=0}^{\infty} < x|e_n > e_n$$

• **Observation :** Une suite orthonormale $(e_n)_n$ est **totale** ssi, pour tout $x \in E$, la suite $(p_N(x))_N$ des projetés orthogonaux de x sur $F_N = vect(e_0, e_1, ..., e_N)$ converge vers x (clair si on se souvient que $p_N(x) = \sum_{n=0}^{N} < x_n|e_n > e_n$).

• **Les suites orthonormales formées de polynômes et le théorème de Weierstrass.**

Exercice 8.1 *un exemple*
Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f|g >= \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, on considère une suite de polynômes $(q_n)_n$ telle que $\begin{cases} < q_n|q_m > & = 0 \text{ si } m \neq n \\ < q_n|q_n > & = 1 \\ deg(q_n) & = n \end{cases}$

1. Comment construire une telle suite ?
2. Quel est l'espace engendré par $(q_0, q_1, ..., q_n)$?
3. Soit $f \in E$. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p_ε tel que
$$||p_\varepsilon - f||_2 \leq \varepsilon.$$
4. Soit $(p_n(f))_n$ la suite des projections orthogonales de f sur les espaces $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Prouver que $(||p_n(f) - f||_2)_n \searrow$.
   (b) Prouver que $(||p_n(f) - f||_2)_n$ a pour limite 0/
   (c) En déduire que $(q_n)_n$ est **totale**.

• **Formes linéaires dans un espace eucidien**

Théorème 8.6
Soit E un espace euclidien .

1. Pour toute forme linéaire $\phi : E \to \mathbb{K}$, il existe un vecteur de $u \in E$ et un seul tel que pour tout $x \in E$,
$$\phi(x) =< x|u > .$$
2. L'application $\phi \in E^* \to u \in E$, où u est le vecteur qui vérifie $\forall x \in E, \phi(x) =< x|u >$, est une bijection, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un anti-isomorphisme si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

8.1.1 Endomorphismes symétriques

Définition 8.3 *endomorphismes symétriques* On dit qu'un endomorphisme de E **euclidien** est **symétrique** ssi pour tout couple $(x, y) \in E^2$,

$$< u(x)|y >=< x|u(y) > .$$

Théorème 8.7 *matrices*

Soit $(E, < | >)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

— u est symétrique ssi il existe une BON dans laquelle sa matrice est symétrique ;
— u est symétrique ssi dans toute BON de E sa matrice est symétrique ;
— u est un endomorphisme orthogonal ssi il existe une BON dans laquelle sa matrice est orthogonale ;
— u est endomorphisme orthogonal ssi dans toute BON de E sa matrice est orthogonale ;

Théorème 8.8 *sous-espaces stables*
Soit E, un espace euclidien, u un endomorphisme de E. Si u est symétrique et si V est stable par u, alors ${}^{\perp}V$ est stable par u.

Théorème 8.9 Soit E espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Alors, si λ et μ sont des valeurs propres distinctes de u,

$$Ker(u-\lambda) \perp Ker(u-\mu).$$

Théorème 8.10 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
— Ses valeurs propres sont réelles.
— A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
— Il existe une matrice orthogonale, $P \in O_n(\mathbb{R})$, telle que ${}^tP\ A\ P$ soit diagonale (on dit alors que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale).

Théorème 8.11
Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E.
1. u est diagonalisable.
2. Il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres de u.
3. Les sev propres de u sont supplémentaires orthogonaux dans E.

8.1.2 Endomorphismes orthogonaux, groupe orthogonal

Définition 8.4 *endomorphismes orthogonaux* On dit qu'un endomorphisme de E **euclidien** est **orthogonal** ou que c'est une **isométrie vectorielle** ssi pour tout $x \in E^2$,

$$< u(x)|u(x) >=< x|x > .$$

Théorème 8.12 *conservation du produit scalaire*
Soit E, un espace euclidien, u un endomorphisme de E.
u est une isométrie vectorielle **ssi** pour tout couple $(x, y) \in E^2$, $< u(x)|u(y) >=< x|y >$.

Théorème 8.13 *réduction*
Soit E un espace euclidien, u une isométrie vectorielle de E. Il existe une BON de E telle que

$$mat(f,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_r \end{bmatrix},$$

les blocs A_j étant des matrices de rotation de taille 2, de la forme $A_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}$

Théorème 8.14 *groupe orthogonal*

- L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E euclidien forme un groupe pour la compositions des endomorphismes. On le note $(O(E), \circ)$
- L'ensemble des endomorphismes orthogonaux tels que $Det(u) = +1$ est un sous-groupe de $O(E)$ noté $O^+(E)$.
- L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forme un groupe pour la multiplication des matrices. On le note $(O_n(\mathbb{R}), \times)$.
- L'ensemble des matrices orthogonales telles que $Det(M) = +1$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ noté $O_n^+(\mathbb{R})$.

Définition 8.5 *symétries orthogonales et réflexions*
On appelle symétrie orthogonale une symétrie dont les sous-espaces propres $ker(f - id)$ et $ker(f + id)$ sont supplémentaires orthogonaux.
Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Théorème 8.15 Un endomorphisme de E est une symétrie orthogonale ssi f est à la fois un endomorphisme symétrique et un endomorphisme orthogonal.

• **Description de $O_2(\mathbb{R})$ et de $O_3(\mathbb{R})$** On note dans les tableaux qui suivent $E_\lambda = ker(u - \lambda)$...

En dimension 2 nous avons :

Det	Spectre	Eléments propres	Nature géométrique	Matrice (BON)
1	$\{1\}$	$E_1 = E$	id_E	I_2
1	$\{-1\}$	$E_{-1} = E$	$-id_E$, rotation d'angle π	$-I_2$
1	vide	...	rotation d'angle $\theta \neq 0[\pi]$	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$
-1	$\{1, -1\}$	$D = E_1, \perp D = E_{-1}$	réflexion d'axe D tq $(\widehat{Ox, D}) = \theta/2$	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$

• La matrice d'une rotation est inchangée par changement de BON **directe** le paramètre θ change de signe avec un changement de BON indirecte.
• La matrice d'une réflexion change avec la BON, le paramètre θ est le demi-angle entre e_1 et l'axe de la rotation ;
• $O_2(\mathbb{R})$ est commutatif (cela devient faux dans $O_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$).

En dimension 3, le polynôme caractéristique est de degré impair, le spectre contient un des réels 1 ou -1 au moins et nous avons :

Det	Spectre	Eléments propres	Nature géométrique
1	$\{1\}$	$E_1 = E$	id_E
1	$\{1\}$	$dimE_1 = 1$	rotation d'axe E_1
-1	$\{-1\}$	$dimE_{-1} = 3$	symétrie centrale, produit de 3 réflexions
-1	$\{-1, 1\}$	$dimE_{-1} = 2$	réflexion de plan E_1
-1	$\{-1\}$	$dimE_{-1} = 1$	produit d'une rotation et d'une réflexion (avec $D \perp P$)

8.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire :

en algèbre géométrie la situation est bien balisée pour qui connaît son cours : matrices réelles symétriques, bases orthonormées de diagonalisation ; matrices et endomorphismes orthogonaux ;

en analyse savoir introduire un produit scalaire, penser à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ramener les problèmes de minimum à l'étude la recherche d'une projection orthogonale (voir ex 8.6) ; calculer les projections orthogonales sur un sev de dimension finie dont une base orthogonale peut être obtenue par le procédé de Gram-Schmidt...

8.3 Énoncés

Tout d'abord les exercices basiques de la banque CCP !

Exercice 8.2 *CCP 2016 (quasi-identique aux mines d'après OT 81 ?)*
Soit E un espace euclidien et $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.
On dit que v est positif si :$\forall x \in E, (v(x)|x) \geq 0$.
On dit que v est défini positif si : v est positif et $\forall x \in E, (v(x)|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

1. (a) Montrer que v est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
   (b) Montrer que v est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
2. Soit $(u_1, ..., u_n)$ une base de E. On pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x|u_k)u_k$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme symétrique défini positif.
   (b) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, défini positif telle que $g^2 = f^{-1}$
   (c) Montrer que $(g(u_1), ..., g(u_n))$ est une base orthonormale de E

Voir corrigé **??**

Exercice 8.3 *CCP 2006*
Soit E un espace euclidien. On considère les **applications** antisymétriques de E dans lui-même telles que

$$(f(x)|y) = -(x|f(y)).$$

1. Montrer qu'une telle application est linéaire
2. Matrice dans une BON ?
3. Dimension de l'espace des applications antisymétriques.

Voir corrigé 14.130

Exercice 8.4 *Mines 2016*
On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n + 1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ et on pose, pour tout couple de polynômes $(P, Q) \in E^2$,

$$(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k).$$

1. Montrer que cette relation définit un produit scalaire sur E.
2. Justifier l'existence et l'unicité d'une base orthonormée $B = (P_0, P_1, ..., P_n)$ dont les degrés sont échelonnés et les coefficients dominants positifs.

3. Déterminer l'expression des $P_i^{(k)}(a_k)$ pour les éléments de cette base. Que se passe-t-il lorsque les $(a_k)_k$ sont égaux ?

Voir indications ou corrigé 8.1.

8.1 Indications ou corrigé exercice 8.4

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ et on pose, pour tout couple de polynômes $(P, Q) \in E^2$,

$$(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k).$$

1. La bilinéarité et la symétrie sont claires. Montrons que cette forme est définie positive :
Remarque : Si vous ne voyez pas cela tout de suite regardez avec un polynôme de degré 0, 1, 2 et la bobinette cherra.
Si $P \in E$, $(P|P) = \sum_{k=0}^{n}(P^{(k)}(a_k))^2 \geq 0$.
D'autre part, si $(P|P) = \sum_{k=0}^{n}(P^{(k)}(a_k))^2 = 0$, pour $k = 0, 1, ..., n,\ P^{(k)}(a_k) = 0$.
Si P est non nul de degré d tel que $0 \leq d \leq n$, on aura $P^{(d)} = cste = 0$ car $P^{(d)}(a_d) = 0$.
C'est une contradiction car $\dfrac{d^d}{dX^d}X^d = d!$.
2. **Unicité** : Si $B = (P_0, P_1, ..., P_n)$ et $B' = (Q_0, Q_1, ..., Q_n)$ sont deux bases de ce type,
- P_0 et Q_0 sont des constantes, donc colinéaires et unitaires. $P_0 = \pm Q_0$ et comme le coefficient de X_0 est positif il y a égalité.
- Les polynômes P_{j+1} et Q_{j+1} sont dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_j[X]$ dans $\mathbb{R}_{j+1}[X]$ qui est une droite et sont donc colinéaires, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_{j+1} = \lambda Q_{j+1}$. $\lambda > 0$ car les coefficients de têtes sont positifs (strictement) et $||P_{j+1}|| = \lambda||Q_{j+1}||$ d'où $\lambda = 1$.
Existence : par le procédé de Gram-Schmidt la construction d'une BON à partir de la base canonique donne des polynômes de degrés échelonnés de termes de tête de la forme $\dfrac{1}{||e_i||}X^i$ lorsque (e_i) est la base orthogonale avant normalisation... Écrire l'algorithme (voir résumé).
3. Notons c_i le coefficient de tête de $P_i(X)$.

• Pour $i = 0$, il est clair que $P_0(a_0) = 1, P_0^{(k)}(a_k) = 0$ si $k \geq 1$.

• Comme $(P_0|P_1) = P_0(a_0)P_1(a_0) + 0 = 0$, il vient $P_1(a_0) = 0$. Par ailleurs, $P_1'(a_1) = c_1, P_1^{(k)}(a_k) = 0$ si $k \geq 2$.

• Comme $(P_0|P_2) = P_0(a_0)P_2(a_0) + 0 = 0$, il vient $P_2(a_0) = 0$
Comme $(P_1|P_2) = P_1(a_0)P_2(a_0) + P_1'(a_1)P_2'(a_1) + 0 = 0$, il vient donc $P_2'(a_1) = 0$..
Par ailleurs, $P"_2(a_2) = 2c_2, P_2^{(k)}(a_k) = 0$ si $k \geq 3$.

On résume : $P_i^{(k)}(a_k) = 0$ sauf si $k = i$, auquel cas $P_i^{(i)}(a_i) = i!c_i$.
Si les $(a_i)_i$ sont égaux, $P_i(X) = c_i(X-a)^i$. On peut même calculer les c_i mais c'est la barbe...

Exercice 8.5 *CCP*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2\ dt$$

existe. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt = 0.$$

voir indications ou corrigé 14.131.

Exercice 8.6 1. Montrer que l'application

$$(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \to \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\ dt$$

est un produit scalaire.

2. Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ dt$$

3. Déterminer une base orthonormale du sous-espace

$$F = \{XP(X)/P(X) \in \mathbb{R}[X]\}.$$

4. Déterminez le minimum de

$$\int_0^{+\infty} (1 - at - bt^2)^2 e^{-t}\ dt.$$

Voir indications ou corrigé 14.132.

Exercice 8.7
On considère l'espace E des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, à valeurs réelles, muni du produit scalaire

$$< f|g >= \int_0^1 fg.$$

Soit $u \in E$, telle que $u(0) = u(1) = 0$, on note T l'endomorphisme de E défini par

$$T(f) = u'f' + uf".$$

1. Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E;
2. Montrer que si $u \leq 0$, T est un endomorphisme positif (ie : $(Tu|u) \geq 0$.)

voir indications ou corrigé 14.133

Exercice 8.8
Soit u un endomorphisme orthogonal de matrice M dans une BON $\mathcal{B}$, de E.

1. Montrer que si F est stable par u, alors ${}^{\perp}F$ est stable par u.
2. Montrer que

$$E = ker(u - id_E) \oplus ker(u + id_E) \oplus^{\perp} [ker(u - id_E) \oplus ker(u + id_E)]$$

et que ces sous-espaces sont stables et orthogonaux deux à deux ;

3. Soit $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n$. Montrer que si Z est vecteur propre de M, le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par X et Y est stable par M.

Voir corrigé **??**

Exercice 8.9 *CCP 2002*
Soit E euclidien muni d'une BON $(e_i)_i$, $(f_i)_i$ une famille de vecteurs de E. On pose $e'_i = e_i + f_i$. Monter que si $\sum ||f_i|| < 1$, les $(e'_i)_i$ forment une partie libre ;
Voir corrigé 14.134

Exercice 8.10 *CCP-MP*
Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'éléments de E telle que, pour tout $x \in E$,

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2.$$

Montrer que $dimE = n$ et que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une BON de E.
Voir corrigé 14.135

Exercice 8.11

$A = [a_{i,j}]$ désigne une matrice symétrique de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$.

1. Soit $(x_i)_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(y_i)_i$ une base orthonormée de vecteurs propres associés aux λ_i. Exprimer $a_{k,k}$ en fonction des produits scalaires $< x_k | y_j >$ et des valeurs propres.
2. En déduire que $a_{1,1} \leq \lambda_1,\ a_{1,1} + a_{2,2} \leq \lambda_1 + \lambda_2, ...$ et généraliser.
3. Montrer que si A est symétrique et positive,
$$\left(\prod_{k=1}^{p} a_{k,k}\right)^{1/p} \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k,$$
pour tout p compris entre 1 et n.

voir correction 14.136

Exercice 8.12 *Mines 2014*

Soit A une matrice à coefficients réels. On suppose que $A\,{}^tA = {}^t A\,A$ et que A est nilpotente d'ordre p. Montrer que $A\,{}^tA = 0$.

Voir corrigé en 14.137

Exercice 8.13 *matrices bistochastiques et barycentres (Centrale MP)*

— On considère l'ensemble K des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients positifs telles que
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1, & \text{pour } i = 1...n; \\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1, & \text{pour } j = 1...n; \end{cases}$$

— On rappelle qu'une matrice de permutation est une matrice telle que
$$(P(e_1), ..., P(e_n))$$
est une permutation des vecteurs $(e_i)_i$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que K est convexe, compact et contient les matrices de permutation ;
2. Montrer que l'isobarycentre des matrices de permutation est une projection et qu'elle appartient à K.
3. Soit P une matrice de permutation. Montrer que s'il existe des éléments A et B de K et $t \in]0,\ 1[$, tels que $P = tA + (1-t)B$ avec alors $P = A = B$.
4. Montrer que la matrice
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{9}{20} \end{bmatrix},$$
est un élément de K, et qu'elle est le milieu de matrices de K, distinctes.

voir indications ou corrigé 14.138

9 Fonctions de plusieurs variables

9.1 Kit de survie

Il y a, somme toute, assez peu de choses à savoir en ce qui concerne les courbes paramétrées et les fonctions de plusieurs variables. Elles sont néanmoins au programme, et tant à l'écrit qu'à l'oral, elles apparaîtront. L'expérience prouve que certaines impasses peuvent se révéler dramatiques. Voilà pourquoi ce banal résumé est ainsi rebaptisé.

Soient f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3, ..)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, a un point de U et $\vec{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Dérivée suivant un vecteur

• On appelle dérivée de f en a suivant le vecteur $\vec{h}$, la limite

$$d_{\vec{h}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + t\vec{h}) - f(a)).$$

• Les **dérivées partielles** dans une base de f en a sont les dérivées suivant les vecteurs de cette base. On les note

$$D_1 f(a) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0, ...), \;\; D_2 f(a) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,\, y_0, ...), \text{etc...}$$

Fonctions différentiables

• Soient $f : U \subset E \to F$, $a \in U$ (ouvert de E).
On dit que f est **différentiable** en a ssi il existe une application linéaire $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a + h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + T(h) + o(h)$$

• T, usuellement notée $\boxed{T = df(a),}$ est appelée **différentielle** de f en a ou **application linéaire tangente** à f en a.

• On dit que f est **différentiable** sur U lorsqu'elle admet une différentielle en tout point de U. Dans ce cas, df désigne la **différentielle** de f :

$$df : a \in U \subset E \to df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$$

• On dit que f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** si df ci-dessus définie est continue.

Théorème 9.1
Si f est une fonction différentiable définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, alors

1. f admet en tout point $a \in U$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, une dérivée selon le vecteur h.
2. Cette dérivée est donnée par la relation $D_h f(a) = df(a)(h)$.
3. f est continue.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

• On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle admet des dérivées partielles continues sur U.
• La **matrice jacobienne** de f dans une base est la matrice dont les colonnes sont les dérivées partielles dans cette base :

Théorème 9.2
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, alors$f$ est différentiable et

1. Pour tout $a \in U$, pour tout vecteur $\vec{h}$, f admet une dérivée suivant le vecteur $\vec{h}$ en a, cette dérivée est donnée par

$$d_{\vec{h}}f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

2. l'application $\vec{h} \to d_{\vec{h}}f(a)$ est linéaire sur $\mathbb{R}^n$ (appelée **différentielle de f en a)** représentée dans la base canonique par la **matrice jacobienne** de f en a : à savoir la matrice dont les colonnes sont les dérivées partielles des composantes de f :

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix},$$

Remarque : Lorsque $p = q$, on appelle **jacobien** (ou déterminant jacobien) le déterminant de cette matrice.

3. f admet **un développement limité à l'ordre 1** au voisinage de a :

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(a) + \vec{o}(\vec{h}).$$

Différentielle et gradient

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in U$, il existe un vecteur et un seul, que l'on notera $\vec{grad}f(a)$ tel que $d_{\vec{h}}f(a) =< \vec{grad}f(a)|\vec{h} >$ pour tout $\vec{h}$. On l'appellera gradient de f en a. Le gradient de f en a est un vecteur, sa différentielle une forme linéaire.

La règle de la chaîne

$$\frac{d}{dt} f \circ \psi(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f(a). \tag{9.1}$$

Matrice jacobienne d'un fonction composée

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1 \circ T(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial f_1 \circ T(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2 \circ T(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial f_2 \circ T(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial T_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial T_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial T_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Extremums

Théorème si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ admet un maximum ou un minimum local en un point a de son ouvert de définition, son gradient est nul en ce point.

Intégrales de chemin

Définition 9.1 *intégrale le long d'un chemin (ou arc) de classe* $\mathcal{C}^1$
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble ouvert et deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: $\gamma : t \in [0,1] \to \gamma(t) \in \Omega$, ainsi que $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$. On appelle intégrale de f le long de γ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 D(f)(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$, et l'on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)\, dt = \int_0^1 D(f)(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt.$$

Vecteurs tangents Définition 9.2 Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in X$. On dit que $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur tangent à X en a ssi il existe un chemin de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[, \gamma(t) \in X \text{ et } \begin{cases} \gamma(0) & = a \\ \gamma'(0) & = u \end{cases}$$

Soit $\Gamma : f(x,y) = 0$; en tout point de Γ, grad(f) est **orthogonal à la tangente** en ce point.
Soit $S : f(x,y,z) = 0$; en tout point de S grad(f) est **orthogonal au plan tangent** en ce point.

Exercice 9.1 *graphe d'une fonction de deux variables*

1. Soit $f : U \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note Σ son graphe défini par :

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^3 / z = f(x,y)\}$$

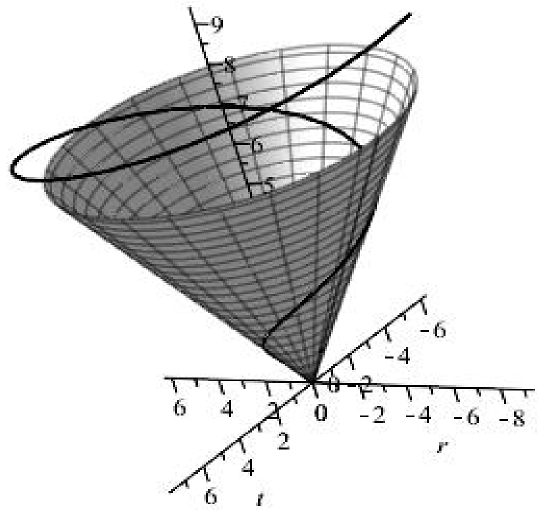
(notations évidentes) et $g(x,y,z) = z - f(x,y)$.

   (a) Justifier que tout vecteur tangent à Σ en un point A est orthogonal au gradient de g en A.

   (b) Tout vecteur du plan orthogonal au gradient de g en A est il un vecteur tangent à Σ en A?

2. Un premier exemple : on considère le demi-cône C d'équation $z^2 = x^2 + y^2, z > 0$

   (a) Dessinez le (coupez par des plans remarquables).



(b) Montrer que cet ensemble admet une équation de la forme $z = f(x, y)$. Donner un plan dans lequel se trouvent tous les vecteurs tangents en un point donné.

(c) Donner des exemples de courbes portées par C (ie : dont la trajectoire est contenue dans C).

9.2 Énoncés

9.3 Continuité

Exercice 9.2 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $\begin{cases} h(x,y) & = \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ h(0,0) & = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x,y) & = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) & = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} g(x,y) & = \dfrac{xy}{x+y}, \quad \text{si } x+y \neq 0 \\ g(x,-x) & = 0 \end{cases}$

— étudier la continuité de g en un point de l'ouvert $x + y \neq 0$;

— étudier la continuité de g en un point de la droite $x + y = 0$;

— montrer que les restrictions de g aux droites contenant $(0, 0)$ sont toutes continues ; y a-t-il pour autant continuité de g en ce point ?

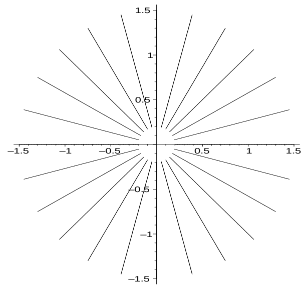


FIGURE 1 – La continuité en O selon toute direction, n'entraîne pas la continuité...

A propos de $o(||X||)$:
Si f et g sont deux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ à laquelle a est adhérent, on dit que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \text{ ssi } \lim_{x \to a} \frac{||f(x)||}{||g(x)||} = 0.$$

On observera que dans cette définition seule $||f||$ et $||g||$ interviennent. f et g n'ont pas nécessairement le même ensemble d'arrivée.

Exercice 9.3
Vrai ou faux ? Justifier !

1. La relation $f(x) =_{x \to a} o(g(x))$ ne dépend pas de la norme choisie
   — dans l'ensemble de départ ;
   — dans l'ensemble d'arrivée ;
2. Dans $\mathbb{R}^2$, en notant $X = (x, y, z)$, peut on affirmer que :

$x =_{X \to 0} o(\|\|X\|\|)$	$x^2 =_{X \to 0} o(\|\|X\|\|)$	$xy =_{X \to 0} o(\|\|X\|\|)$	$x^3 + xy^2 =_{X \to 0} o(\|\|X\|\|^2)$

9.4 Recherche de minimum ou maximum : ce qu'il faut connaître et savoir faire :

Recherche d'extremums d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D \in \mathbb{R}^n$.

• Si D est un ouvert
On recherche les points critiques de f (résolution du système $gradf = 0$). Pour chaque point critique on étudie le signe de $f(A+X) - f(A)$. En dimension 2 on posera $X = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$.

• Si D n'est pas un ouvert

1. On recherche les éventuels points critiques intérieurs à D qui est ouvert.
2. On étudie f sur la frontière de D. Si l'on dispose d'une représentation paramétrique de cette frontière on est ramené à un problème en dimension n-1.
3. On compare les extremums sur la frontière aux extremums à l'intérieur de D. Voir l'exercice 9.5.

4. si D est compact, l'existence des extremums est assurée ce qui peut simplifier l'étude (exercice 9.7).

Exercice 9.4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x + 2\,y + 4\,xy + x^2 + 2\,y^2 + x^3,$$

Déterminez les extremums locaux et globaux de f.

Exercice 9.5 *recherche d'extremum, oraux de concours*

1. Déterminer les extremums de la fonction $(x,y) \to x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ *(CCP).*
2. Montrer que la fonction f définie sur $]0,+\infty[^2$ par $f(x,\,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$, admet un unique extremum (CCP).
3. Soit $a > 0$, f définie sur $]0,+\infty[^2$ par
$$f(x,\,y) = \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}.$$
Montrer que f présente un minimum global.

Exercice 9.6 *maximum sur un compact (fermé borné)*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2,$$

et $K = \{\vec{x}\,/\,\forall i,\, x_i \geq 0 \text{ et } x_1 + ... + x_n = 1\}$. On suppose que $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in [1,n]$.

1. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur K.
2. On suppose $n = 2$. Déterminer les extremums de f sur K;
3. Reprendre l'étude pour $n = 3$.

Exercice 9.7 *CCP 2007 un exemple d'étude écourtée par argument de compacité*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

1. On pose $F = [0,1] \times [0,1]$, justifier que f est bornée sur F et qu'elle y atteint sa borne supérieure (que l'on notera M.)
2. Montrer que si la borne supérieure est atteinte sur $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, on a $M = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.
3. Déterminer le maximum de la fonction f sur la frontière de F déterminer M. On pourra utiliser la calculatrice.

. *Corrigé dans le polycopié du cours.*

Exercice 9.8 *CCP - 2006, planches diverses*
Extremums locaux et globaux de $f : (x,y) \to x(\ln^2 x + y^2)$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
Voir corrigé 14.139

Exercice 9.9 *CCP*
Extremum de

$$f : (x,y) \to x^2 + x^2y + y^3.$$

Voir corrigé 14.140

9.5 divers

Exercice 9.10 *Mines 2007*

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t > 0$, pour tout $x \in X$, $tx \in D$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe un entier strictement positif p, tel que $f(tx) = t^p f(x)$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = pf(x). \tag{9.2}$$
2. Réciproquement, montrer que si la relation 9.2 est vérifiée alors $f(tx) = t^p f(x)$.
3. Rechercher les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(tx) = t^p f(x)$ lorsque $n = 2$.

Voir corrigé 14.142

Exercice 9.11 *CCP*

1. Quelles sont les applications $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^2$ dont la différentielle est en chaque point une rotation ?
2. Donner des exemples d'applications $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^2$ dont la différentielle est en chaque point une similitude directe ?

Voir indications ou corrigé 14.144

10 Séries de fonctions, séries entières

10.1 Résumé convergence des suites et séries de fonctions

10.1.1 Convergence simple, convergence uniforme et convergence normale

Définition 10.1 *différents modes de convergence*

— On dit que la suite des fonctions $(f_n)_n$ définies sur A, partie de l'evn. (E, N) à valeurs dans F espace normé de dimension finie, **converge simplement** vers f si, pour tout $x \in I$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

— On dit que la série de fonctions de terme général f_n défini sur A, converge simplement vers S si la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_n$$

converge simplement vers S, c'est à dire si pour tout $x \in A$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = S(x) \in F.$$

— On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément** sur A vers une fonction $f \in \mathcal{F}(A, F)$ si

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{\underset{A}{\infty}} = 0;$$

Ce qui signifie que

$$||f_n - f||_{\underset{A}{\infty}} = \sup_{x\in I} ||f_n(x) - f(x)||_F = \varepsilon_n$$

est une suite de réels positifs de limite zéro.

— On dit que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur A vers une fonction $S \in \mathcal{F}(A, F)$ si

$$\lim_{n\to\infty} ||\sum_{k=0}^{n} f_k - S||_{\underset{A}{\infty}} = 0;$$

Cela signifie que

$$\sup_{x\in I} |\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - S(x)|$$

est une suite de réels positifs de limite zéro.

— On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur A, si
  — chacune des fonctions est bornée sur A,
  — la série **numérique** $\sum ||f_n||_\infty$ converge

Théorème 10.1 *relations entre les différents modes de convergence*
Le schéma suivant résume les relations entre les différents mode de convergence :

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & \sum f_n \text{ conv. absolt.} & \searrow & \\ \sum f_n \text{ conv. normlt.} & & & & \sum f_n \text{ conv. simplt.} \\ & \searrow & \sum f_n \text{ conv. unift.} & \nearrow & \end{array}$$

Vocabulaire pour les séries de fonctions :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$, et

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$$

la suite des sommes partielles de la série qui lui est associée.

- Nous parlerons de la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général f_n, de sommes partielles S_n;
- lorsque la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A, les restes sont les fonctions définies par

  $$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x);$$

  On définit ainsi une suite des fonctions restes $(R_n)_n$ qui converge simplement vers 0 ;
- on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ est absolument convergente ssi la série des fonctions $\sum_{k=0}^{n} |f_n|$ est simplement convergente ; dans ce cas la série $\sum f_n$ est aussi simplement convergente.

Théorème 10.2 *restes et convergence uniforme*

- Lorsque la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A, la suite des restes converge simplement vers 0.
- la série de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente sur A ssi
  - elle converge simplement sur A,
  - la suite des restes converge uniformément vers 0

Pour démontrer que...	**On s'y prend comme ci...**
$(f_n)_n$ **converge simplement sur** I?	On considère $x \in I$. On étudie la **suite numérique** $(f_n(x))_n$
$(f_n)_n$ **converge uniformément sur** I?	• On détermine la limite simple de $(f_n(x))_n$; notons la $g(x)$. • On majore $\lvert f_n(x) - g(x)\rvert$ pour obtenir $$\lvert f_n(x) - g(x)\rvert \leq u_n$$ **avec** u_n **indépendant** de x. On réalise cela soit par application de règles de calcul sur $\leq$, soit en étudiant les variations de $f_n - g$. On en déduit que $\lvert\lvert f_n - g\rvert\rvert_\infty \leq u_n$ et on peut conclure si $\lim u_n = 0$.
$(\sum f_n)_n$ converge **simplement** sur I?	On étudie la **série** numérique $\sum f_n(x)$.
$(\sum f_n)_n$ **converge uniformément sur** I?	• **Dans les cas simples, on peut établir la convergence normale.** Si on peut majorer $\lvert\lvert f_n\rvert\rvert_\infty$ et prouver que la **série** $\sum \lvert\lvert f_n\rvert\rvert_\infty$ converge, le tour est joué. Pour cela, majorer $f_n(x)\rvert$ **indépendamment** de x et passer **ensuite** à la norme. • **Convergence uniforme.** On fait comme dans la case précédente, détermination de la limite simple de la **série**, **majoration uniforme** de $\lvert R_n(x)\rvert = \lvert S_n(x) - S(x)\rvert$ par u_n qui ne dépend pas de x. C'est **particulièrement facile** si la série numérique $\sum f_n(x)$ **vérifie le CSSA**. On majore $$R_n(x) = \sum_{n+1}^{\infty} f_n(x)$$ par son premier terme, que l'on majore ensuite indépendamment de x.

10.1.2 Propriétés des limites uniformes, interversion des limites

---

Théorème 10.3 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A, F)$, on suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{F}(A, F)$, alors :

— si, à partir d'un certain rang, les fonctions f_n sont continues en $a \in A$, alors la fonction f est continue en a.

— si, à partir d'un certain rang, les fonctions f_n sont continues sur A, alors la fonction f est continue sur I.

Conséquence importante en pratique, à connaître et reconnaître :

Si une suite $(f_n)_n$, de fonctions continues **converge uniformément vers f sur tout intervalle compact** $[a,\ b-\alpha] \subset [a,b[$, alors f est continue sur $[a,b[$.

Théorème 10.4 *interversion des limites*

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions bornées sur $I = [a,b[$ (b réel ou $+\infty$). On suppose que

— $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f,

— pour chaque n, f_n admet une limite en b :

$$\lim_{x\to b} f_n(x) = \ell_n$$

alors :

— la fonction f admet une limite en b,

— cette limite est la limite des ℓ_n :

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{n\to\infty} \ell_n$$

— ce qui s'exprime encore

$$\lim_{x\to b}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b} f_n(x) \tag{10.1}$$

C'est pourquoi on parle d'interversion des limites.

Corollaire 10.1 *cas des séries*

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions bornées sur $I = [a,b[$. On suppose que

— la série $\sum f_k$ converge uniformément vers une fonction S,

— pour chaque n, f_n admet une limite en b :

$$\lim_{x\to b} f_n(x) = b_n$$

alors :

— la fonction S admet une limite en b,

— cette limite est la somme $\sum b_k$:

$$\lim_{x\to b} S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k$$

— ce qui s'exprime encore

$$\lim_{x\to b}\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to b} f_n(x) \tag{10.2}$$

10.1.3 Interversion des limites et de l'intégration

Théorème 10.5 *intégration d'une limite uniforme*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur LE SEGMENT $I = [a, b]$. Si les fonctions f_n sont continues et si $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I, alors

- f est continue
- la suite des intégrales $\int_a^b f_n(t)\ dt$ converge
- et de plus,

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt$$

Corollaire 10.2 *cas des séries*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $I = [a, b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S, alors

- S est continue
- la série des intégrales $\sum \int_a^b f_n(t)\ dt$ converge
- et de plus,

$$\int_a^b S(t)\ dt = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\right)\ dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(t)\ dt$$

Attention tout cela devient FAUX si $I = [0, +\infty[$, par exemple. Sur des **intervalles quelconques** la convergence uniforme ne permet pas de conclure.

On fait alors appel au théorème de convergence dominée ou au théorème d'intégration terme à terme.

10.1.4 Dérivation de la limite

Soit $(f_n)_n$ une série de fonctions qui converge uniformément (ou tout ce que vous voulez) vers f, on suppose que les fonctions f_n sont de de classe $\mathcal{C}^1$.

- Que peut on dire de la dérivée de la somme ?
- Que peut on dire de la somme des dérivées ?
- Peut on dériver terme à terme ?

Comme vous le savez, les réponses dans l'ordre, pourraient commencer par :

- Rien en général : la somme des fonctions f_n peut ne pas être dérivable.
- Rien en général : la somme des dérivées f'_n peut ne pas être convergente,
- De la série des dérivées (obtenue en dérivant terme à terme) on ne peut rien dire, pas même qu'elle converge ; et si même elle converge, cela ne signifie pas que la série des f_n converge.

Théorème 10.6 *dérivation*
Soit $(F_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, telle que

- chaque F_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$,
- il existe $a \in I$ tel que $(F_n(a))_n$ converge (on note α sa limite)
- $(DF_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g,

Alors, $(F_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui est une primitive de g) En d'autres termes :

$$\lim_{n\to\infty} DF_n = g = D(\lim_{n\to\infty} F_n)$$

les convergences étant uniformes sur tout intervalle compact contenu dans I.

Corollaire 10.3 *le même pour les séries*
Soit $(F_n)_n$ une suite de fonctions telle que
- chaque F_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$,
- il existe $a \in I$ tel que $\sum F_n(a)$ converge (on note σ sa limite)
- la série de terme général DF_n converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction s,

Alors, $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive de s définie par

$$S(x) = \sigma + \int_a^x s(t)\ dt$$

En d'autres termes :

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} DF_n = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} F_n\right) = DS$$

la convergence étant uniforme sur tout intervalle compact contenu dans I.

Corollaire 10.4 *le même pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$*
Soit $(F_n)_n$ une suite de fonctions telle que
- chaque F_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$,
- pour tout $j \in \{1, ..., k-1\}$, il existe $a \in I$ tel que $(F_n^{(j)}(a))_n$ converge
- la suite de terme général $F_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction s,

Alors, $(F_n)_n$ ainsi que la suite des dérivées $(F_n^{(j)})_n$ convergent uniformément sur tout segment de I et

$$\lim_{n\to+\infty} F_n^{(j)} = \left(\lim_{n\to+\infty} F_n\right)^{(j)}.$$

L'exercice ci-dessous montre comment faire avec le théorème 10.4.

Exercice 10.1 Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos(nt),$$

est $2\pi-$périodique , de classe $\mathcal{C}^2$.

10.1 Indication ou corrigé *10.1*
On note $u_n(t) = \dfrac{1}{n^4} \cos(nt)$.
- On commence par constater que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$; c'est évident puisque

$||u_n||_\infty = \dfrac{1}{n^4}$; on a donc bien $\sum ||u_n||_\infty$ convergente, ce qui est la définition. La série est donc uniformément convergente, simplement convergente. Une série de fonctions de période 2π à une limite simple également de période 2π .

• Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$, observons que chaque fonction u_n est elle même de classe $\mathcal{C}^2$ et que

— $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, comme nous venons de l'établir.

— $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, en effet $u'_n(t) = \dfrac{-1}{n^3}\sin(nt)$ est le terme général d'une série numérique absolument convergente (on peut aussi observer, bien que ce ne soit pas nécessaire, que $\sum ||u'_n||$ converge et que $\sum u_n$ est une série de fonctions normalement convergente).

— $\sum u"_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$; en effet cette série est uniformément convergente puisqu'elle converge normalement ($u'_n(t) = \dfrac{-1}{n^2}\cos(nt)$ et $\sum ||u"_n|| = \sum \dfrac{1}{n^2}$.)

On conclut avec le théorème de dérivation terme à terme (théorème 10.4), que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que ses dérivées d'ordre 1 et 2 s'obtiennent en dérivant la série terme à terme.

10.1.5 Séries entières et dérivation

Théorème 10.7 Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ somme d'une série entière de rayon de convergence R. Alors :

— f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$;

— la dérivée de f est la série entière dérivée formelle : $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$; on dérive donc terme à terme.

— la dérivée $p^{ième}$ de f est la $p^{ième}$ dérivée de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n\geq p} n(n-1)...(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n\geq p} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

Exercice 10.2 Montrer que les fonctions suivantes admettent des prolongements de classe $\mathcal{C}^\infty$ à des intervalles que l'on précisera.

$\dfrac{\sin x}{x}$	$\dfrac{\ln(1+x)}{x}$	$\dfrac{\ln(x)}{x-1}$	$\dfrac{e^x - 1}{x}$

Calculer pour chacune d'elles $f^{(6)}(x_0)$, x_0 centre de l'intervalle...

10.2 Indication ou corrigé *10.2*

1. Pour $x \neq 0$, on a
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}.$$
Cette fonction admet un prolongement DSE donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que $f^{(6)}(0) = -1/7$.
2. ...

3. De même, pour $|x-1|<1$, on a

$$\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = \frac{1}{x-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-1)^k}{k+1}.$$

   Cette fonction admet un prolongement DSE au voisinage de 1, (le rayon de la SE est R=1) et $f^{(6)}(0) = -1/7$. $f^{(6)}(1) = \dfrac{6!}{7}$.

4. ...

10.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire :

Les théorèmes du cours. Vous avez déjà des fiches résumés (suites et séries de fonctions Annexe p 10.1). Revoir les exercices calculatoires sur les séries entières.

Ce que disait le rapport de l'oral des CCP 2007 à ce propos :

- *Les développements limités et les DSE usuels sont souvent mal connus.*
- *Séries entières :*
  - *La définition du rayon de convergence est souvent oubliée (les élèves utilisent une formule permettant de le calculer, en pensant qu'elle s'applique toujours).*
  - *Beaucoup pensent qu'un série entière est uniformément convergente sur tout son disque ouvert de convergence.*
  - *Recherche des solutions DSE d'une équation différentielle : en général les élèves ne précisent pas clairement la méthode, ils se restreignent à l'aspect calculatoire.*
- *Suites et séries de fonctions :*
  définitions parfois mal sues, surtout pour la convergence normale (que l'on confond parfois avec l'absolue convergence) ; difficulté pour montrer qu'une série ne converge pas normalement.

Ce que dit le rapport de l'oral des CCP 2015 à ce propos :

En ce qui concerne les séries de fonctions,

- De grosses lacunes sur la convergence uniforme. Beaucoup de candidats pensent à considérer le reste **mais ne le majorent pas indépendamment de** x. Certains arrivent à rectifier lorsqu'on leur demande de reformuler la définition de la convergence uniforme **et qu'ils la connaissent...**
- Pour la convergence normale de $\sum f_n$ sur A, les candidats sont rapidement en difficulté s'il ne suffit pas de majorer $|f_n(x)|$ indépendamment de x sur A. Ils ne pensent pas systématiquement, dans ce cas là, à chercher $\sup_{x\in A}|f_n(x)|$ **en étudiant les variations d'une fonction par exemple.**
- Ne pas oublier lorsqu'on parle de convergence uniforme ou normale de **préciser sur quel domaine** sinon cela n'a aucun sens.
- Confusion parfois entre la convergence absolue et la convergence normale quand on se place ailleurs que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

En ce qui concerne l'interversion limite et intégrale,

- encore trop de candidats pensent à utiliser un argument de convergence uniforme lorsqu'ils ne sont pas sur un segment.
- Plus généralement, en ce qui concerne les **théorèmes d'interversion**, les candidats s'emmêlent les pinceaux très rapidement en mélangeant ceux pour les **suites** de fonctions, ceux pour les **séries** de fonctions, ceux sur un **segment** et ceux sur un **intervalle**. Nous leur conseillons de synthétiser ces théorèmes dans un simple tableau [7].
- Et quand ils savent quel théorème utiliser, il est rare d'obtenir toutes les hypothèses pour l'appliquer...

En ce qui concerne les séries entières :

- La recherche du rayon de convergence ne se limite pas à l'utilisation de la règle de d'Alembert.

7. Fait page **??**

- La règle de d'Alembert pour les séries entières reste inutilisable pour les séries lacunaires ou par exemple les séries du type $\sum \cos n\, z^n$...
- Il est donc fondamental de connaitre d'autres techniques présentées en cours ou en séances d'exercices pour déterminer le rayon de convergence : utiliser la règle de d'Alembert **pour les séries numériques,** déterminer les valeurs de z pour lesquelles $(a_n\, z^n)$ est bornée, majorer ou minorer $|a_n z^n|$, repérer une valeur de z intéressante pour laquelle $\sum a_n\, z^n$ converge ou diverge...
- La règle de d'Alembert n'est pas une équivalence : une série entière de rayon de convergence R ne vérifie pas forcément $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{R}$!
- Une erreur courante : de nombreux candidats écrivent que si $\lim \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \ell |z|$ alors la SE converge ssi $\ell|z| < 1$... Chercher l'erreur ? Que peut on affirmer ?
- Une série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence mais pas forcément sur le disque de convergence comme le pensent encore la majorité des candidats.
- Mauvaise connaissance des développements en série entière usuels. De ce fait, les candidats sont souvent en difficulté sur des exercices-type de calculs des sommes de séries entières ou numériques.

10.3 Énoncés

Exercice 10.3 *CCP énoncés brefs de plusieurs planches...*

1. On considère la fonction définie par
$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Déterminer une équation différentielle que vérifie f; en déduire un DSE de la fonction f dont vous préciserez le rayon de convergence.
2. Décomposer en éléments simples
$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}.$$
Montrer que g est DSE au voisinage de l'origine. Rayon de convergence, DL3.

Voir corrigé 14.145

Exercice 10.4 *CCP*

Soit
$$S : x \to \sum_{n=0}^{\infty} n x e^{-nx^2}.$$

1. Domaine de définition de la fonction S;
2. La convergence est-elle normale, uniforme ?
3. Donner une expression de S à l'aide de fonctions usuelles.

voir indications ou corrigé 14.146.

Exercice 10.5

Soit

$$f : x \to \sum_{n=0}^{\infty} n^x e^{-nx}.$$

1. Étudier la fonction f. Prouver qu'elle est convexe.
2. Donner un équivalent de f en 0.

voir indications ou corrigé 14.147.

Exercice 10.6 *ENS PT*

Montrer que

$$\forall x \in R,\ \forall y \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n$$

converge et calculer sa somme.
voir indications ou corrigé 14.148.

Exercice 10.7 *CCP*

Soit n un entier naturel non nul. On appelle dérangement de $[1,n]$ une permutation de $[1,n]$ qui ne laisse aucun élément invariant. On note D_n le nombre de dérangements de $[1,n]$ et on pose $D_0 = 1$.

1. Calculer D_1, D_2, D_3 et D_4
2. Établir la formule
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k n = n!$$
3. Soit f la somme de la série entière
$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n.$$
Montrer que cette se a un rayon de convergence $R \geq 1$, calculer $e^x f(x)$ et en déduire D_n.

voir indications ou corrigé 14.149.

Exercice 10.8 *CCP*

Soit S_p la somme de la série entière

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p}^n x^n.$$

1. Calculer le rayon de convergence, dépend-il de p?
2. Calculer $(1-x)S_p'(x)$ en déduire la somme $S_p(x)$.

voir indications ou corrigé 14.150.

Exercice 10.9 *logarithme intégral*

On se propose d'étudier la série entière de la variable réelle

$$Li(x) = \sum \frac{x^n}{n^2},$$

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Montrer que

$$Li(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\ dt$$

sur l'intervalle $]-1,1[$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$Li(x) + Li(1-x) = Li(1) - \ln(1-x)\ln x$$

4. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2;$$

Voir corrigé 14.151

Exercice 10.10
Soit la série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ convergente sur le disque ouvert de rayon 1. On suppose que pour $|z| < 1$, $|f(z)| \leq \dfrac{1}{1-|z|}$. Montrer que

$$|a_n| \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}.$$

Voir corrigé **??**

Exercice 10.11 *Centrale 2004*
Soit

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. Montrer que cette relation définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un domaine que l'on précisera.
2. Montrer que f est développable en série entière sur $]-2,2[$.
3. Montrer que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t}\, dt.$$

Voir corrigé 14.152

Exercice 10.12
1. Soient x et t deux réels, avec $|x| < 1$. Donner une expression de

$$\Re\left(\frac{1}{x - e^{it}}\right).$$

2. Montrer que la fonction $x \to \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ est développable en série entière de rayon 1.
3. En déduire :

$$\int_0^{\pi} \left[\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\right]^2\ dt = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}.$$

4. Justifier pour tout réel x tel que $|x| \neq 1$, l'existence de
$$G(x) = \int_0^\pi \left[\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\right]^2 \ dt.$$
5. Calculer pour $x \in]-1, 1[$,
$$\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\ dt.$$
En déduire une relation entre $G(x)$ et $G(1/x)$.

Voir corrigé 14.153

Exercice 10.13 *CCP et aussi Mines 2015*
On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Quel est son domaine de définition ? Est elle continue ?
2. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Donner sa limite et un équivalent en 0^+.

Voir corrigé 14.154

Exercice 10.14 *Mines 2016 ?*
On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Quel est son domaine de définition ? Est elle continue ?
2. Est elle dérivable ?

Voir corrigé 14.155

11 Intégration

11.1 Résumé : convergence des suites et séries d'intégrales

11.1.1 Suites d'intégrales

Théorème 11.1 si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues par morceaux convergeant **uniformément** vers f également continue par morceaux sur un **segment** $I = [a, b]$, alors

$$\lim_n \int_I f_n = \int_I (\lim_n f_n) = \int_I f.$$

Théorème 11.2 *théorème de convergence dominée*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle I, à valeurs complexes. On suppose que

- la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f qui est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur I, telle que, pour tout n, $|f_n| \leq \phi$ (hypothèse de domination).

Alors,

- chaque fonction f_n est intégrable sur I,
- la limite simple, f, est intégrable sur I,
- la suite des intégrales $\int_I f_n$ converge et

$$\lim_n \int_I f_n = \int_I \lim_n f_n = \int_I f.$$

Théorème 11.3 *théorème de convergence dominée pour les séries*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle I, à valeurs complexes. On suppose que

- la série $\sum_n f_n$ converge simplement vers une fonction S qui est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur I, telle que, pour tout n, $|S_n = \sum_{k=0}^n f_k| \leq \phi$ (hypothèse de domination).

Alors,

- chaque fonction $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ est intégrable sur I,
- la fonction $S = \sum_{k=0}^\infty f_k$, est intégrable sur I,
- la série des intégrales $\sum_{k=0}^n \int_I f_k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_I f_k = \int_I \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \int_I f.$$

Théorème 11.4 *intégration terme à terme d'une série*
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle I. On suppose que

- pour tout n, f_n est intégrable sur I,

— la série $\sum f_n$ converge simplement vers S qui est continue par morceaux .
— la série des intégrales $\sum(\int_I |f_n|)$ converge ;

Alors,

— S est intégrable sur I, et son intégrale est donnée par :

$$\int_I S = \int_I \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_I f_n\right).$$

— On a la majoration

$$||S||_1 = \int_I |S| = \int_I |\sum_{k=0}^{\infty} f_n| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||f_n||_1.$$

11.1.2 Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 11.5 *continuité*

Soit $f : (x,t) \in A \times I \to f(x,t) \in \mathbb{K}$, où A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que

— $t \to f(x,t)$ est continue par morceaux sur I, pour tout $x \in A$;
— $x \to f(x,t)$ est continue sur A, pour tout $t \in I$;
— il existe une fonction ϕ_0, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \phi_0(t),$$

Alors,

— pour tout $x \in A$, la fonction $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I,
— la fonction F définie sur A par $F(x) = \int_I f(x,t)\ dt$ est continue.

Théorème 11.6 *continuité et dérivabilité*

Soit $f : (x,t) \in A \times I \to f(x,t) \in \mathbb{K}$, où A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que

— $t \to f(x,t)$ est continue par morceaux sur I, pour tout $x \in A$;
— $x \to f(x,t)$ est continue sur A, pour tout t ;
— il existe une fonction ϕ_0, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \phi_0(t),$$

Si, de plus

— f admet des dérivées partielles par rapport à x : $\dfrac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k}$, pour $k = 1, ...p$;
— chaque dérivée est continue par morceaux sur I par rapport à la variable t, continue sur A par rapport à la variable x,
— il existe des fonctions ϕ_k, continues par morceaux et intégrables sur I, telles que

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k}| \leq \phi_k(t),$$

Alors,

— pour tout $x \in A$, la fonction $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I, de même que les fonctions $t \to \dfrac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k}$,

— la fonction F définie sur A par $F(x) = \int_I f(x,t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur A et

$$F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k}\, dt.$$

11.1.3 La fonction Γ :

• La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et :

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$	$\dfrac{d^k}{dx^k}\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt$
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$	$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$
$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$	

[8]

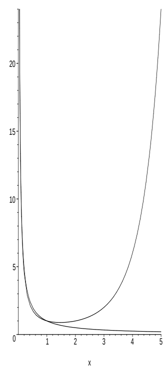


FIGURE 2 – graphes des fonctions Γ et $x -> 1/x$

11.2 Ce qu'il faut connaître et savoir faire.

Ce que dit le rapport CCP 2015 à ce propos :

8. ceci est un pdf

Intégrabilité sur un intervalle quelconque

- Oubli quasi-systématique d'évoquer la continuité par morceaux sur l'intervalle concerné ;
- Manque inquiétant de technique pour justifier l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle : en majorité, les candidats ne pensent même pas, si la fonction est positive, à utiliser un équivalent et lorsqu'ils en trouvent un, ils peinent souvent à comparer l'équivalent à une fonction de Riemann qui convient, surtout si la fonction n'est pas intégrable.
- **Ces difficultés sont à mettre sur le compte d'un manque d'entraînement.**
- Et à propos des suites et séries de fonctions : En ce qui concerne l'interversion limite et intégrale, encore trop de candidats pensent à utiliser un argument de convergence uniforme lorsqu'ils ne sont pas sur un segment. Plus généralement, en ce qui concerne les théorèmes d'interversion, les candidats s'emmêlent les pinceaux très rapidement en mélangeant ceux pour les suites de fonctions, ceux pour les séries de fonctions, ceux sur un segment et ceux sur un intervalle. **Nous leur conseillons de synthétiser ces théorèmes dans un simple tableau.** Et quand ils savent quel théorème utiliser, il est rare d'obtenir toutes les hypothèses pour l'appliquer...

On suit le conseil du jury CCP, qui décidément connaît son affaire, on remplit le tableau :

Intervalle	Convergence (suite ou série de fcts. **cpm**)	Théorème à appliquer
$I=[a,b]$, segment	convergence uniforme, normale	théorème 11.1
$I=[a,b]$	convergence simple	pas de théorème ! phénomène de la bosse flottante
I quelconque	convergence uniforme, normale	pas de théorème ! contre-exemples à trouver rapidement !
I quelconque	convergence simple	pas de théorème contre-exemples à trouver rapidement !
I quelconque	convergence simple **et domination**	**thm. de convergence dominée** (11.2) ou (11.3)
I quelconque	convergence simple et convergence de $\sum \int \lvert f_n \rvert$	**thm. d'intégration terme à terme** dit L^1 (11.4) uniquement pour les séries de fcts

11.3 Énoncés

Exercice 11.1 *CCP 2016*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^{1} \frac{e^t}{t}\, dt = n$.
   Indication de l'énoncé : On pourra considérer la fonction ...
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$ et déterminer sa limite.
3. On pose, pour tout n, $v_n = n + \ln u_n$. Montrer que $(v_n)_n$ converge et donner sa limite sous la forme d'une intégrale.
4. Donner un équivalent de u_n.

Corrigé en 14.156.

Exercice 11.2 *mines*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence de

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin xt}{\sqrt{t}}\, dt.$$

La calculer.
voir 14.157

Exercice 11.3 *d'après mines*

1. Justifier l'existence de l'intégrale
$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$
2. On pose
$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} e^{-i\,x\,t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$
   Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer $F(x)$. En déduire I.

voir 14.158

Exercice 11.4 *CCP*
Justifier l'existence de l'intégrale suivante et la calculer

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

voir 14.159

Exercice 11.5 *CCP*
Discuter de l'existence de l'intégrale suivante

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} \left(\ln x - \ln(1 - e^{-x})\right)\, dx.$$

voir 14.160

Exercice 11.6 *brèves*

1. Soit f une fonction continue par morceaux intégrable sur $=]0,+\infty[$. Pourquoi a-t-on
$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{\infty} f(x)\ dx = 0?$$
2. la fonction g définie sur $]0,1[$ par
$$g(t)=\frac{t^\alpha-1}{\ln t}$$
y est elle intégrable sur ce même intervalle ?
3. l'intégrale
$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\ dx$$
a-t-elle un sens ?

voir indications ou corrigé 14.161

Exercice 11.7 nature des intégrales impropres :
$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}}\sin x\,dx$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\ dx$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$
Voir corrigé en 14.162

Exercice 11.8 *CCP*
Justifier la convergence de
$$\sum\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\ dt$$
ainsi que l'égalité
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\ dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\ dx.$$
voir indications ou corrigé 14.163

Exercice 11.9
Calculer la somme de la série numérique de terme général : $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. *voir indications ou corrigé 14.164*

Exercice 11.10 *CCP PSI-2002 : des sujets couplés par deux ; ici la partie intégration de plusieurs d'entre eux.*

1. Calculer
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\arctan(t)\ dt.$$

2. Soit $x \in]0, 2\pi[$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{'} \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} = \frac{-1}{2i} \int_{\pi}^{x} \frac{e^{it/2}}{\sin t/2}(1 - e^{int})\, dt.$$

En déduire que la série de t.g. $\dfrac{e^{ikx}}{k}$ converge et calculer sa somme.

3. Soit $f_n(x) = \dfrac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)}$.
   (a) Étudier l'intégrabilité de f_n sur $]0, +\infty[$.
   (b) Existence et valeur de
   $$\lim_{n \to +\infty} \left(n \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \right).$$
   (c) Équivalent de $\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ en $+\infty$.

voir indications ou corrigé 14.165.

Exercice 11.11 *d'après Centrale PSI-2003*

Soit $F(x) = \sum_{n \geq 0} \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2}$ et $s > 0$.

1. Montrer que $g : t \to F(t)e^{-t/s}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $s \to \displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)e^{-t/s}\, dt$ est DSE sur $]-1/2, 1/2[$.

Voir corrigé 14.166

Exercice 11.12 *d'après Centrale PSI-2003*
Soit $g : (x, t) \to g(x, t)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$;

1. Que dire de la dérivabilité des fonctions :
$$F : x \to \int_0^x g(1, t)\, dt,$$
$$G : x \to \int_0^1 g(x, t)\, dt,$$
$$H : x \to \int_0^x g(x, t)\, dt?$$
Dans chaque cas préciser la dérivée (le sujet posé à l'oral ne faisait mention que de la troisième, gare !).
2. Étudier la fonction f définie par :
$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)^x}\, dt.$$

Voir corrigé 14.167

Exercice 11.13 *CCP et autres*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1 + t^2}\, dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$; est-elle continue, dérivable ?
2. Calculer sa limite en $+\infty$;
3. La fonction f est elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Voir corrigé 14.168

Exercice 11.14 *Mines 2004*
Calculer, lorsque $|b| < a$,

$$\int_0^{\pi} \ln(a + b\cos t)\, dt.$$

Voir corrigé 14.169

Exercice 11.15 *questions diverses*

1. Calculer
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 t}\, dt;$$
2. Montrer que
$$\int_0^x e^{t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x};$$
3. f étant continue sur $[0,1]$, que dire de la limite de
$$\int_0^1 f(t^n)\, dt?$$

Voir corrigé 14.170

Exercice 11.16
On considère pour $r \in [0, 1[$, la fonction définie par

$$P_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = 1 + \sum_{n\geq 1} r^n \left(e^{int} + e^{-int}\right).$$

1. Étudier la convergence de cette série de fonctions, donner une expression simple de sa somme et représenter $P_r(t)$ pour quelques valeurs de r;
2. A toute fonction u continue sur $[0, 2\pi]$ telle que $u(0) = u(2\pi)$, on associe la fonction $\tilde{u}$, définie sur le disque $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, par la relation
$$\tilde{u}(z) = \tilde{u}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta)u(t)\ dt.$$
   (a) Calculer $\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\, d\theta$. Montrer que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$,
$$\lim_{r\to 1^-} \tilde{u}(re^{i\theta}) - u(\theta) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)(u(t) - u(\theta))\ dt\right) = 0.$$
   (b) Montrer que $\tilde{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque ouvert D et que
$$\Delta(\tilde{u}) = 0.$$

On rappelle que l'expression du laplacien en coordonnées polaires est

$$\Delta g_P(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} g_P(r,\theta) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} g_P(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g_P(r,\theta) \text{ si } r > 0.$$

Voir corrigé 14.171

Exercice 11.17 *centrale (RMS)*
Soit f définie pour $X > 0$, par

$$f(X) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{e^{Xt} - 1}\ dt.$$

1. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$;
2. Montrer que f est somme d'une série de fonctions rationnelles simples ;
3. Donner un équivalent de f en 0 ;

Voir corrigé 14.172

Exercice 11.18 Soit

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\ dt.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge ;
2. Donner un équivalent de u_n;

Voir corrigé 14.173

Exercice 11.19 *Mines MP*

1. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle, croissante, de limite $+\infty$. Justifier l'égalité

$$\int_{@}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a_n x}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

2.
3.

Voir corrigé 14.174

Exercice 11.20 *CCP MP*
Soit α un réel ; on définit une suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$ en posant

$$f_n(x) = x(1 + n^{\alpha} e^{-nx}).$$

1. Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme ;
2. Étudier la convergence uniforme.
3. Calculer

$$\lim \int_0^1 x(1 + n^{\alpha} e^{-nx})\ dx.$$

l'énoncé de l'OT propose $\int_0^1 x(1 + n^{1/2} e^{-nx})\ dx$?
Voir corrigé 14.175

Exercice 11.21 *CCP MP*
On pose pour n, p entiers et $x \in \mathbb{R}$,

$$I_{n,p}(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^p\ dt.$$

1. Caluler $I_{n,p}(x)$;
2. Quelle est la limite de $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Rappeler le domaine de la fonction Γ et montrer que

$$\Gamma(x) = \lim \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}.$$

Vérifier

Voir corrigé 14.176

Exercice 11.22

Étudier les séries de termes généraux :

1. $$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2+...+x^n}\,dx$$

2. $$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2+...+x^n}\,dx$$

Voir corrigé 14.177

12 Equations différentielles

12.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire :

Résoudre explicitement dans les cas particuliers du programme :

- équations linéaires d'ordre 1 (voir l'exercice 12.2 par exemple)
- équations linéaires d'ordre 2, méthodes de variation des constantes lorsqu'on connaît une solution qui ne s'annule pas (voir l'exercice 12.3).

Systèmes linéaires pour résoudre $X'(t) = AX(t) + b(t)$,

- on observe que $X(t) = PY(t)$ est solution du système ssi Y vérifie :

$$Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}b(t). \tag{12.1}$$

- on recherche P telle que $T = P^{-1}AP$ soit diagonale ou triangulaire, ce qui permet de résoudre le système 12.1.
- on obtient $X(t) = PY(t)$.

Voir les exercices 12.4, 12.5...

Équations linéaires d'ordre 2 :

voir les exercices 12.3,

- méthode de variation des constantes (penser que si l'on connaît une solution z de l'équation homogène qui ne s'annule pas, on peut poser $y(t) = K(t)z(t)$, ce qui permet de retrouver toutes les solutions des équations avec ou sans second membre. L'intérêt de connaître un système fondamental est ailleurs (formule théorique, systèmes vectoriels non associés à une équation scalaire).
- recherche de solutions DSE (analyse synthèse), penser à justifier l'existence de la solution dont les calculs donnent les coefficients montrant que le rayon de convergence est strictement positif.

12.2 Énoncés

Exercice 12.1 *ENSEA 2016 (Merci Violette)*

1. Résoudre $f"(x) - f(x) = g(x)$ avec g continue sur $\mathbb{R}$, en utilisant la méthode de variations des constantes. Exprimer l'ensemble des solutions à l'aide de la fonction
$$x \to \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,dt.$$
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f" - f \geq 0$.
Montrer que f est ? ? ?

Voir indications ou corrigé 14.178

Exercice 12.2 *CCP*

Soit $\lambda > 0$. On se propose d'étudier l'équation différentielle linéaire,
$$xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$$
sur $]0, +\infty[$.

1. Rechercher la solution qui admet une limite en 0^+.
2. Rechercher les solutions développables en séries entières au voisinage de 0.
3. Calculer $\sum \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$ (variante à l'X ?)

Voir indications ou corrigé 14.179

Exercice 12.3 *CCP*
Soit E l'équation différentielle
$$xy" + 3y' - 4x^3y = 0.$$

1. Rechercher les solutions DSE au voisinage de 0.
2. Résoudre l'équation.

Voir indications ou corrigé 14.180.

Exercice 12.4 *Centrale, dans une épreuve où* ***numpy*** *est disponible*

On considère le système linéaire $\mathcal{S}$
$$\left\{\begin{array}{ccc} x'(t) & = & 3x + y - 3 \\ y'(t) & = & -4x - y + 3 - 6t \\ z'(t) & = & 4x - 8y - 2z \end{array}\right.$$

1. Réduire la matrice associée au système.
2. Résoudre le système homogène associé au problème $\mathcal{S}$. En déduire les solutions de $\mathcal{S}$.

Indications ou corrigé **??**.

Exercice 12.5 Résoudre le système différentiel
$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

voir indications ou corrigé 14.181

Exercice 12.6 *2 exos posés dont celui-ci*

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y" + y = \frac{1}{x}.$$
2. Déterminer les solutions définies sur $]0, +\infty[$ telles que
$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0;$$

Voir corrigé **??**

13 Probabilités

13.1 Résumé du cours

13.1.1 Espaces probabilisés

Définition 13.1 *notion de tribu*
Soit Ω un ensemble quelconque. On note, comme à l'accoutumée, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω . Une tribu $\mathcal{T}$(on dit aussi $\sigma-$algèbre) sur Ω est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $\mathcal{T}$ est non vide ;
2. $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire :
$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow \bar{A} = \complement_\Omega A \in \mathcal{T};$$
3. Pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $\mathcal{T}$, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \in \mathcal{T}$.

Définition 13.2 *vocabulaire de base, extension...*
- Un **espace probabilisable** $(\Omega, \mathcal{T})$ est la donnée d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω;
- Ω est appelé **univers des possibles**, ses éléments des issues, des réalisations ou des possibles.
- Un élément de la tribu $\mathcal{T}$ **est un événement**.
- Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, les singletons $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$, sont des évènements et on dit alors que ce sont des **événements élémentaires**. Ce sera le cas pour Ω au plus dénombrable seulement.
- Ω est l'événement **certain** ; $\emptyset$ est l'événement **impossible**.
- Un **système complet d'évènements** est une famille finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω.
- Deux événements disjoints sont dits **incompatibles,** le complémentaire de A noté $\bar{A}$ quand on fait des probabilités est appelé **évènement contraire** de A.

Définition 13.3 *notion de probabilité*
Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $P : \mathcal{T} \to [0, 1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :
- $P(\Omega) = 1$;
- Pour toute suite d'événements deux à deux disjoints de $\mathcal{T}$, $(A_n)_n$,
$$P\left(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \qquad (13.1)$$

Conséquences immédiates :
• $\boxed{P(\emptyset) = 0.}$ Pourquoi ?

• Pour une suite **finie**, $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ d'événements disjoints,
$$\boxed{P(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} A_k) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)}$$

Il suffit d'appliquer (13.1) à la même suite prolongée par $A_{n+p} = \emptyset$. Cette définition d'une loi de probabilité **généralise** donc celle qui a été donné en première année dans le cadre restreint des univers finis.

• Une conséquence : pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

• Une deuxième conséquence : une loi de probabilité est **croissante pour l'inclusion**

$$\boxed{\text{si } A \subset B, \text{ alors, } P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A).}$$

• **Cas où Ω est au plus dénombrable et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$** :

Dans ce cas, toute partie $A \in \Omega$, est finie ou dénombrable et l'on peut écrire $A = \{\omega_i ; i \in I\}$ où I est soit de la forme $[\![1, n]\!]$ soit égal à $\mathbb{N}$. Ainsi $A = \cup_{i \in I} \{\omega_i\}$ et

$$\boxed{P(A) = \sum_{i \in I} P(\{\omega_i\}) \leq 1}$$

En particulier, la famille $(P(\omega))_{\omega \in \Omega}$ est sommable (revoir la définition de la sommabilité) et

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1 = P(\Omega).$$

Propriétés

Théorème 13.1 *propriétés élémentaires*
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

— Continuité croissante : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite croissante d'événements, alors

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P\left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} A_n\right) \tag{13.2}$$

— Continuité décroissante : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite décroissante d'événements, alors

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P\left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} A_n\right) \tag{13.3}$$

— Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$P\left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \tag{13.4}$$

Définition 13.4

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace prob**abilisé.**
Un évènement **négligeable (ou quasi-impossible)** est un événement $A \in \mathcal{T}$ tel que $P(A) = 0$.
Un évènement **presque-sûr (ou quasi-certain)** est un événement $A \in \mathcal{T}$ tel que $P(A) = 1$.
Une propriété Q est **presque-sûre** lorsque $A = \{\omega / Q(\omega)\}$ est un évènement presque sûr.

Un **système quasi-complet d'événements** est une famille finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints et dont la réunion est un évènement presque-sûr.

13.1.2 Probabilités conditionnelles, trois formules fondamentales

Définition 13.5 *probabilités conditionnelles*
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle relative à l'élément A la loi de probabilité (ce qui doit être préalablement vérifié) sur $(\Omega, \mathcal{T})$ définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On note aussi $P(A|B)$ pour $P_A(B)$.

Théorème 13.2 *formule des probabilités composées*
Pour toute famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ telle que $P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right)$$

Théorème 13.3 *formule des probabilités totales*
Soit un $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'évènements (ie : $\forall (i,j) \in I^2, A_i \cap A_j = \emptyset$ et $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = 1$). Alors, pour tout $X \in \mathcal{T}$,

$$P(X) = \sum_{i\in I} P(X \cap A_i) = \sum_{i\in I} P(X|A_i)P(A_i).$$

Théorème 13.4 *formule de Bayes*
Soit un $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'évènements tel que pour tout $i \in I$, $P(A_i) > 0$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{T}$ tel que $P(X) > 0$ et tout $j \in I$,

$$P(A_j|X) = \frac{P(X|A_j)P(A_j)}{P(X)} = \frac{P(X|A_j)P(A_j)}{\sum_{i\in I} P(X|A_i)P(A_i)}.$$

Indépendance **Indépendance**

Définition 13.6 *événements indépendants*
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
On dit que deux événements A et $B \in \mathcal{T}$ sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
De la même façon, on dit que $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ est une famille d'événements mutuellement indépendants (ou indépendants dans leur ensemble) ssi pour toute sous-famille finie, $(A_{i_k})_{1\leq k\leq n}$,

$$P\left(\bigcap_{i=k}^{n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} A_{i_k}.$$

On observera que la définition de l'indépendance de A et de B revient à dire que, soit l'un des deux événements a une probabilité nulle (et donc également $A \cap B$), soit que $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.

13.1.3 Variables aléatoires discrètes

Définition 13.7 *variable aléatoire discrète*
Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabili**sable**. Une variable aléatoire discrète sur Ω est une application $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble au plus dénombrable, telle que, pour tout élément $x \in E$,

$$X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}.$$

Théorème 13.5 Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabili**sé** et $X : \omega \to E$ une variable aléatoire discrète. Alors,
- Pour toute partie $B \in \mathcal{P}(E)$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.
- On définit une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ en posant :

$$P_X(B) = P(X \in B).$$

Définition 13.8
Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur cet espace.
• On appelle **loi conjointe du couple** (X, Y) la loi de probabilité définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ par

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P((X \in A) \cap (Y \in B))$$

Comme $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est au plus dénombrable, cette loi est entièrement définie par la donnée des probabilités

$$P(X = x_i \cap Y = y_j), \text{ pour tout } (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

• Les **lois marginales du couple** (X, Y) sont les lois de X et de Y : elles sont données par

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i \cap Y = y_j) \text{ pour tout } x_i \in Proj_1 X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

$$P(Y = y_j) = \sum_j P(X = x_i \cap Y = y_j) \text{ pour tout } y_j \in Proj_2 X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

• Pour $x \in X(\omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$ (respectivement $P(X > x) \neq 0$), **la loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x)$ (respectivement $(X < x)$, etc.) est la loi de probabilité sur $Y(\Omega)$ définie par :

$$P_{(X=x)}(Y = y_j) = P(Y = y_j | X = x) = \frac{P(Y = y_j \cap X = x)}{P(X = x)}$$

respectivement :

$$P_{(X>x)}(Y = y_j) = P(Y = y_j | X > x) = \frac{P(Y = y_j \cap X > x)}{P(X > x)}$$

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_q	total
x_1	$P(X = x_1 \cap Y = y_1)$	$\dots$	$P(X = x_1 \cap Y = y_q)$	$P(X = x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	$P(X = x_p \cap Y = y_1)$	$\dots$	$P(X = x_p \cap Y = y_q)$	$P(X = x_p)$
total	$P(Y = y_1)$	$\dots$	$P(Y = y_q)$	what else ?

Définition 13.9 *n-uplets de variables aléatoires, variables vectorielles...*
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $Z = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-uplet de v.a définies sur cet espace (on dit aussi une variable aléatoire vectorielle) :.
• On étend les notions précédentes en définissant **la loi conjointe du n-uplet** :

$$P(Z = (x_1, ..., x_n)) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X = x_i)\right)$$

• ainsi que les **lois marginales**

$$P(X_n = \omega) = \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1})} = P(X_1 = x_1 \cap ... \cap X_{n-1} x_{n-1} \cap X_n = \omega)$$

Définition 13.10 *variables aléatoires indépendantes*
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
• On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur cet espace sont indépendantes ssi pour tous $A \subset X(\Omega), B \in Y(\Omega)$,

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

• On dit que des variables aléatoires discrètes $(X_i)_i$ sont mutuellement indépendantes ssi pour toute famille finie d'indices $(i_1, i_2, ..., i_n)$ et toute famille $(A_k)_{i_k}$ avec $A_{i_k} \in X_{i_k}(\Omega)$, on a

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_{i_k} \in A_{i_k})\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_{i_k} \in A_{i_k}\right)$$

Théorème 13.6 *un résultat fondamental*
Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires discrètes **et mutuellement indépendantes** sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Alors, pour tout couple (f, g) de fonctions $f : X_1(\Omega) \times ... \times X_p(\Omega) \to E = f\left(\prod_{i=1}^{p} X_i(\Omega)\right)$ et $g : X_{p+1}(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega) \to F = g\left(\prod_{i=p+1}^{n} X_i(\Omega)\right)$ (avec $1 \leq p < n$) les variables aléatoires discrètes

$$Z = f(X_1, ..., X_p) \text{ et } W = g(X_{p+1}, ..., X_n)$$

sont indépendantes.

Remarque : nous ferons un usage systématique de ce résultat dans les circonstances suivantes :
Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, alors :

1. X_{n+1} et la variable vectorielle $Y_n = (X_1, X_2, ..., X_n)$ sont indépendantes ;
2. X_{n+1} et la variable $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ sont indépendantes ;
3. X_{n+1}^2 et la variable $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$ sont indépendantes ;

13.1.4 Espérance, variance et écart-type

Définition 13.11
Soit $X : (\Omega, \mathcal{T}, P) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète et à valeurs réelles. On dit que X admet une **espérance finie** si la famille (au plus dénombrable) $(x \times P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. On pose alors

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times P(X = x)$$

Lorsque X prend des valeurs positives, son espérance est la somme

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times P(X = x) \in [0, +\infty].$$

Théorème 13.7 *comparaison* Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs réelles. Si $|X| \leq |Y|$ et si Y admet une espérance finie, alors X admet aussi une espérance finie.

Théorème 13.8 *linéarité et positivité*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs réelles, qui admettent des espérances finies. Alors,

- $X+Y$ est une va. discrète qui admet pour espérance

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est une va. discrète qui admet pour espérance

$$E(\lambda X) = \lambda E(X).$$

- Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$

Théorème 13.9 *formule de transfert*
Soient X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs réelles, d'espérance finie et f une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
Alors $f \circ X : (\Omega, \mathcal{T}, P) \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie ssi la famille $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(X)P(X=x) \tag{13.5}$$

Théorème 13.10 *produit de variables aléatoires indépendantes*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs réelles, qui admettent des espérances. Si X et Y sont **indépendantes**, $X \times Y$ est une va. discrète qui admet pour espérance

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y).$$

Définition 13.12 *moment d'ordre 2*
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs réelles. On dit que X admet un moment d'ordre 2 (ou qu'elle est de carré sommable) ssi $E(|X|^2) < +\infty$ (X^2 admet une espérance finie).

Théorème 13.11 *variables de carrés sommables*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs réelles ou complexes.

1. Si $E(|X|^2) < +\infty$, alors $E(|X|) < +\infty$.
2. Si $E(|X|^2) < +\infty$, alors $E\left(|X - E(X)|^2\right) < +\infty$. De plus

$$E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E^2(X) \text{ (formule de Huygens)}$$

3. Si $E(|X|^2) < +\infty$ et $E(|Y|^2) < +\infty$ alors $E(|X\,Y|) < +\infty$. De plus, pour des variables réelles,

$$E\,(X\,Y)^2 \leq E(X^2)\,E(Y^2) \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

4. Si $E(|X|^2) < +\infty$ et $E(|Y|^2) < +\infty$ alors $E((|X| + |Y|)^2) < +\infty$.
L'ensemble des v.a. $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sur à valeurs réelles qui admettent un moment d'ordre 2, forme un espace vectoriel.

Définition 13.13 *variance, écart-type, covariance*

1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, la variance et l'écart-type de X sont définis respectivement par

$$var(X) = E((X - E(X))^2) \text{ et } \sigma(X) = var(X)^{1/2}$$

$\boxed{\text{On note aussi } V(X) \text{ pour } var(X).}$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, la covariance du couple (X, Y) est définie par :

$$cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)).$$

Théorème 13.12 *propriétés de la variance et de la covariance*

1. cov est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur le sous-espace des v.a. réelles définies sur admettant un moment d'ordre 2.
2. $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
3. $var(X) = cov(X X) = E(X^2) - E^2(X)$ (formule de Huygens)
4. $var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 var(X)$ pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
5. Pour toute famille $(X_1, ..., X_n)$ de v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$,
$$var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} cov(X_i, X_j).$$
6. Si X et Y sont des v.a. indépendantes, alors
$$cov(X, Y) = 0,$$
$$var(X + Y) = var(X) + var(Y).$$
7. Si $(X_1, ..., X_n)$ sont mutuellement indépendantes,
$$var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i).$$

13.1.5 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible...

Théorème 13.13 *inégalité de Markov*

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles et positives, d'espérance finie $E(X)$. Pour tout réel $\lambda > 0$, $P(X \geq \lambda) \leq \dfrac{E(X)}{\lambda}$.

Théorème 13.14 *inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs numériques, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On suppose que X^2 est d'espérance finie et note $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P\left(|X - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 13.15 *loi faible des grands nombres*
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance μ et de même variance σ^2. Les moyennes empiriques des $(X_n)_n$ sont les variables aléatoires définie par

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. La moyenne empirique $\bar{X_n}$ a pour espérance μ et pour variance $\dfrac{\sigma^2}{n}$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\right) = 0.$$
3. Plus précisément :
$$P\left(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

13.1.6 Fonctions génératrices

Définition 13.14 *fonction génératrice d'une variable entière*
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle **fonction génératrice** de X la série entière définie par

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) z^k = E\left(z^X\right).$$

Théorème 13.16 *propriétés des fonctions génératrices de variables aléatoires*
Soit X une variable aléatoire entière (à valeurs dans $\mathbb{N}$) de fonction génératrice G_X.

1. La série entière G_X converge normalement sur le disque fermé $\bar{D}(0,1)$. Elle est en particulier continue sur ce disque.
2. $G_X(1) = 1$ et la série entière G_X a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
3. G_X caractérise la loi de X : connaissant G_X on déduit $P(X = k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.
4. X est d'espérance finie ssi G_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Dans ce cas
$$\boxed{G'_X(1) = E(X).}$$
5. Si G_X est supposée seulement dérivable en 1, alors X est d'espérance finie, G_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et $G'(1) = E(X)$.
6. X^n est d'espérance finie ssi G_X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$. Dans ce cas $G_X^{(n)}(1) = E(X(X-1)...(X_n+1))$.
   En particulier, lorsque X^2 est d'espérance finie,
$$\boxed{V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = G"_X(1) + G'_X(1) - G'^2_X(1)}$$

13.1.7 Lois usuelles, le résumé du résumé

Loi	paramètre	$P(X=n)$	G_X	$E(X)$	$V(X)$
de Bernoulli	$b(p)$	$P(X=k)=\begin{cases}1-p & \text{si } k=0\\ p & \text{si } k=1\end{cases}$	$1-p+pz$	p	$p(1-p)$
binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}\,p^k(1-p)^{n-k}$	$(1-p+pz)^n$	np	$np(1-p)$
géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{pz}{1-(1-p)z}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$P(X=n)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$	$e^{\lambda(z-1)}$	λ	λ

13.2 Exercices

Exercice 13.1
Retrouver espérance et variance des lois usuelles à l'aide de leurs séries génératrices

Exercice 13.2 *Centrale 2015*

1. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n = \lambda + o(1)$. Montrer que la suite $(v_n)_n$ telle que $\frac{1}{n}\sum_{k\geq 1} u_k$ converge.
2. On considère une va discrète Y définie sur un espace probabilisé $\Omega, \mathcal{T}, P)$ telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Montrer que Y admet une espérance finie ssi la série $\sum_k P(Y \geq k)$ converge. Justifier qu'alors
$$E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y \geq k)$$

Voir corrigé 13.1.

13.1 *Corrigé de l'exercice 13.2*

1. C'est le lemme de Cesaro, voir le chapitre Topologie.
2. On considère une va discrète telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   • On suppose que Y admet une espérance finie. Cette espérance est
$$E(Y) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} kP(Y = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \sum_{j\in[\![1,k]\!]} P(Y = k)$$
   • On suppose que la série $\sum_k P(Y \geq k)$ converge.
   • Montrons que sous ces conditions,
$$E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y \geq k)$$
   On pose $u_{k,j} = \begin{cases} P(Y = k) & \text{si } k \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La famille $(u_{k,j})_{(k,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable parce que toute sous famille finie a une somme majorée par $E(Y) \in \mathbb{R}$.
   En effet, si A est une partie de $\mathbb{N}^{*2}$, elle est contenue dans un pavé $[\![1, a]\!] \times [\![1, a]\!]$ et on a
$$\sum_{(k,j)\in A} u_{k,j} \leq \sum_{(k,j)\in[\![1,a]\!]\times[\![1,a]\!]} u_{k,j} = \sum_{k=1}^{a}\sum_{j=1}^{k} u_{k,j} = \sum_{k=1}^{a} kP(Y = k) \leq E(Y)$$
   Par ailleurs,
$$\sum_{(k,j)\in[\![1,a]\!]\times[\![1,a]\!]} u_{k,j} = \sum_{j=1}^{a} P(X \geq k)$$

Exercice 13.3 *divergence de Kullback-Leibler...*
Soient $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ un ensemble fini ou dénombrable et P et Q deux lois de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. En notant $p_i = P(\{\omega_i\})$ et $q_i = P(\{\omega_i\})$ et en supposant que, pour tout i, $q_i \neq 0 \Rightarrow p_i \neq 0$,

$$\mathcal{D}(P||Q) = \sum_{i/p_i \neq 0} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right). \tag{13.6}$$

1. On suppose que Ω est fini et que pour tout $i, p_i > 0$.
   (a) Démontrer que cette expression est positive.
   (b) On pose $f(q_1, ..., q_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right)$. Préciser le domaine de définition de cette fonction et montrer qu'elle atteint son minimum en un seul point. Quel est il ?
   (c) On pose $f(q_1, ..., q_n) = \sum_{i/p_i \neq 0} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right)$. L'article de Wikipedia énonce : $f(q) = 0$ ssi $(p_i = q_i)$ presque sûrement. Qu'est-ce que cela veut dire ? Justifiez l'énoncé une fois que vous l'aurez précisé.
2. On suppose que $\Omega = \mathbb{N}$ et que P et Q sont deux lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
   (a) Calculer $\mathcal{D}(P||Q)$, justifier qu'elle est bien définie.
   (b)

Exercice 13.4 *d'après CCP (sujet 0)*
Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante

- si à l'instant n il est sur A, alors à l'instant $n+1$ il est sur B avec une probabilité de $3/4$ ou sur C avec une probabilité de $1/4$;
- si à l'instant n il est sur B, alors à l'instant $n+1$ il est sur A avec une probabilité de $3/4$ ou sur C avec une probabilité de $1/4$;
- si à l'instant n il est sur C alors à l'instant $n+1$ il est sur B.

On note A_n l'évènement « le mobile se trouve en A à l'instant n », B_n l'évènement « le mobile se trouve en B l'instant n » et C_n l'évènement « le mobile se trouve en C à l'instant n »
Le mobile commence son trajet en partant du point A.
On note, pour tout entier naturel n, $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$

1. (a) Calculer $P(C_2)$.
   (b) Déterminer, en les justifiant, des relations de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n. On les écrira sous forme matricielle.
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Vérifier que ${}^tA$ est une matrice stochastique (ie : à termes positifs, la somme des termes d'une ligne quelconque étant égale à 1).
   (b) Donner une interprétation probabiliste de cette observation.
   (c) Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}\,A\,P$ soit diagonale [9]
   (d) Déterminer la limite en l'infini des suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et (c_n).
3. ★ C'est à peu de chose près (l'ordre des questions) un sujet Zéro CCP. Il ne mentionne pas d'espace probabilisé dans lequel ces calculs seraient valides. Pouvez vous corriger cela ?

Calculs en **??** *page 255.*

9. Le sujet CCP suggère d'utiliser une calculette. C'est en fait indispensable !

Exercice 13.5 *loi multinomiale*
On considère un dé à n faces que l'on va lancer N fois. On note p_i la probabilité que la face numérotée i apparaisse lors d'un lancé et X_i le nombre d'occurrences de cette face lors de N lancers. On fait l'hypothèse que les lancés successifs sont indépendants.

1. Donner la loi de X_i et préciser la loi conjointe de $(X_1, X_2, ..., X_n)$.
2. Les variables X_i et X_j sont elles indépendantes ?

Exercice 13.6 *loi de succession de Laplace*[10].
On considère des urnes $(\mathcal{U}_k)_{0 \leq k \leq N}$. L'urne $\mathcal{U}_k$ contient k boules blanches et $N - k$ boules noires.
On réalise l'expérience qui consiste à :
- choisir une urne au hasard ;
- prélever avec remise successivement n boules dans cette urne.
On note alors K le numéro de l'urne choisie et X_n le nombre de boules blanches prélevées.

1. Calculer la probabilité de l'événement $(X_n = p)$ (ou la loi de X_n).
2. On se propose de calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$.
   (a) Monter que
   $$B(p+1, q+1) = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$
   (b) Conclure.
3. Sachant que $(X_n = n)$, quelle est la probabilité que $(X_{n+1} = n+1)$?

Exercice 13.7

1. Montrer que des événements sont indépendants ssi leurs **variables indicatrices** sont des variables aléatoires indépendantes (la variable indicatrice de A est définie par $X(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et $X(\omega) = 0$ sinon).
2. Démontrer que si les variables aléatoires discrètes $(X_1, X_2, ..., X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors pour toute famille $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ de fonctions telles que les variables aléatoires $(\phi_1 \circ X_1, \phi_2 \circ X_2, ..., \phi_n \circ X_n)$ sont définies , celles-ci sont également mutuellement indépendantes.

Exercice 13.8 *sup et inf de v.a. indépendantes*
On considère des variables aléatoires discrètes $(X_1, X_2, ..., X_n)$ mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$..

1. Donner la fonction de répartition de $\sup(X_i)$;
2. Donner la fonction de répartition de $\inf(X_i)$;

Exercice 13.9 *somme de v.a. première approche*
On considère deux variables aléatoires discrètes (X_1, X_2) à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Exprimer la loi de $(X_1 + X_2)$ en fonction des lois conditionnelles de X_2 sachant $(X_1 = k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Cas de variables indépendantes ?
3. Peut on généraliser à des variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ou vectorielles ?

Exercice 13.10
Un corps radioactif émet un nombre aléatoire N de particules pendant une durée déterminée. On suppose que :
— N suit une loi de Poisson de paramètre λ.
— Chaque particule est détectée avec une probabilité $p \in]0, 1[$.

10. A associer au problème angoissant : le Soleil se lèvera-t-il encore demain ?

On note X le nombre de particules détectées.

1. Donner la loi de X.
2. Donner la loi de N sachant que $X = k$.

14 Corrigés

14.1 Indications ou corrigés des exercices d'Algèbre

14.1 Indication ou corrigé 2.1

1. **Classique :** il faut
   • connaître la définition d'un corps et démontrer que $\mathcal{F}$ est un corps (anneau dont tout élément non nul est inversible) ;
   • savoir qu'un morphisme de corps est un morphisme d'anneaux entre deux anneaux qui sont aussi des corps ;
   • pour la bijectivité de $\phi : z \to \begin{bmatrix} Re(z) & -Im(z) \\ Im(z) & Re(z) \end{bmatrix}$, il peut être plus agréable de vérifier que c'est un ismorphisme d'espace vectoriel...

2. **Voilà un plus bel exercice !**

   Notons $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une telle matrice.

   (a) • C'est une matrice inversible telle que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ (écrire $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$...)
   • A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ car le polynôme $X^p - 1$ qui est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples, l'annule. Les valeurs propres complexes de A sont des racines de ce polynôme et vérifient $\alpha^p = 1$.
   • Son polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = x^2 - Tr(A)x + 1$, avec $Tr(A) = a + d \in \mathbb{Z}$.
   • Raisonnons au cas par cas en fonction de tout cela :
   — $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$, $A = I_2$;
   — $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-1\}$, $A = -I_2$;
   — $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\alpha, \overline{\alpha}\}$, les valeurs propres sont complexes conjuguées, ce sont aussi des racines de l'unité ;

   $$\chi_A(x) = x^2 - Tr(A)x + 1 = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}).$$

   Ainsi, $2Re(\alpha) = Tr(A) = a + d \in \mathbb{Z}$. Comme $|Re(\alpha)| \leq |\alpha| = 1$, on a $Re(\alpha) \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, -1\}$. Les cas où $\alpha \in \mathbb{R}$ ont été étudiés à part, il nous reste $\alpha = e^{\pm i\pi/3}, e^{\pm 2i\pi/3}$ et $\alpha = \pm i$.
   — Si $\alpha = e^{\pm i\pi/3}$, on a $A^6 = I_2$, $Tr(A) = a + d = 1$ et $ad + bc = 1$.
   Comme $bc \neq 0$ (la matrice n'est pas triangulaire puisque ses coefficients sont entiers contrairement à ses vp) A est de la forme

   $$A = G1(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ \dfrac{a\,(1-a)-1}{b} & 1-a \end{bmatrix}$$

   avec $b | (a\,(1-a)-1)$.

   — Si $\alpha = e^{\pm 2i\pi/3}$, on a $A^3 = I_2$, $Tr(A) = a + d = -1$ et $ad + bc = 1$. A est de la forme

   $$A = G2(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ \dfrac{a\,(-1-a)-1}{b} & -1-a \end{bmatrix}$$

   avec $b | (a\,(-1-a)-1)$.

— Enfin, si $\alpha = \pm i$ $A^4 = 1$ et $A \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

On a $Tr(A) = a + d = 0, \det(A) = -a^2 + bc = 0$. Comme pour les mêmes raisons $bc \neq 0$ on a donc

$$A = G3(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2+1}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Dans tous les cas $A^6 = I_2, A^3 = I_2$ ou $A^4 = I_2$. L'ensemble de ces matrices est infini, chaque type admet au moins une matrice par valeur de a, elles ne commutent pas 2 à 2 (y compris dans le même type).

—

(b) Et bien non ! L'ensemble est infini et il n'est pas stable par multiplication, par exemple si $A = G1(a,1) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a\,(1-a) - 1 & 1-a \end{bmatrix}$, si $B = G1(u,1) = \begin{bmatrix} u & 1 \\ u\,(1-u) - 1 & 1-u \end{bmatrix}$, alors la trace du produit $(2\,au - u^2 - 1 - a^2)$ n'est ni 1 ni -1 ni 0...

14.2 Indication ou corrigé 2.2

1. $\Rightarrow$ On suppose que $A \subset H$. Montrons que $AH = H$. Pour cela deux inclusions, dont l'une est évidente : $AH \subset HH = H$. Montrons que l'on a aussi $H \subset AH$. Considérons $h \in H$, il s'écrit $h = aa^{-1}h$ avec $a^{-1}h \in H$... puisque $a \in H, a^{-1}, h \in H$...

   $\Leftarrow$ supposons maintenant que $AH = H$. Un élément $a \in A$ est de la forme $a = ae \in AH = H$.
2. Moins trivial que le précédent, mais raisonnable tout de même.
   • On peut s'assurer avant de commencer que $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ vérifie ces propriétés : un élément de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ s'écrit $X = (x_1, ..., x_n)$ où chaque x_i est $\bar{0}$ ou $\bar{1}$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$...
   • Considérons donc notre groupe G.
   Il est commutatif : en effet, $(xy)(xy) = e$, et en multipliant à gauche par x, à droite par y, on obtient : $x(xy)(xy)y = yx = xey = xy$.
   Puisque G est fini, il admet des parties génératrices finies. Considérons une partie génératrice ayant le plus petit nombre d'éléments : $\{a_1, a_2, ...a_n\}$. Tout élément de G s'écrit $y = a_1^{p_1} a_2^{p_2} ... a_n^{p_n}$ (c'est une conséquence de la commutativité, que nous avons démontrée dans ce but). Les p_i sont 0 ou 1 puisque $a_i^p = a_i$ ou e suivant que p est impair ou pair.
   Montrons que cette écriture est unique. Supposons qu'un certain y s'écrive

   $$y = a_1^{p_1} a_2^{p_2} ... a_n^{p_n} = a_1^{q_1} a_2^{q_2} ... a_n^{q_n}.$$

   Si $i \leq n$ est le premier indice pour lequel $p_i \neq q_i$, on a en multipliant par $a_1^{p_1} ... a_{j-1}^{p_{j-1}}$: $a_j^{p_j} ... a_n^{p_n} = a_j^{q_j} ... a_n^{q_n}$. En multipliant à gauche par $a_j^{q_j}$, à droite par $a_{j+1}^{p_{j+1}} ... a_n^{p_n}$ on obtient

   $$a_j = a_j^{p_j + q_j} = \prod_{k=j+1}^{n} a_k^{p_k + q_k}.$$

   Comme a_j s'exprime en fonction des autres éléments de la partie génératrice, celle-ci n'est pas minimale. Contradiction.
   Isomorphisme : on peut alors définir

   $$\phi : y = a_1^{p_1} a_2^{p_2} ... a_n^{p_n} \in G \to (p_1, p_2, ..., p_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n ...$$

   c'est bien une application, on vérifie facilement que c'est un morphisme de groupes, qu'elle est bijective...

14.3 Indications ou corrigé 2.3

1. **G est un groupe pour la multiplication des matrices**
Montrons que c'est un sous groupe de $(GL_4(\mathbb{K}), \times)$:
• G est non vide (contient l'identité par exemple)
• Considérons deux éléments M_1 et M_2 appartenant à G et montrons que $Q = M_1 M_2^{-1}$ est encore un élément de G :
-$Q = M_1 M_2^{-1}$ est inversible dans $GL_4(\mathbb{K})$ comme produit de matrices inversibles,
- il reste à vérifier que Q et son inverse sont à coefficients entiers et circulantes.
Par hypothèse, $M_1 \in V, M_2^{-1} \in V$ donc Q de la même façon que $Q^{-1} = M_2 M_1^{-1}$ est une matrice à coefficients entiers. Sont elles circulantes ?
Pour prouver qu'un produit de matrices circulantes est une matrice circulante, on peut faire le calcul, mais aussi observer qu'une matrice circulante est un polynôme en
$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
En effet une matrice circulante s'écrit $M = aId + bU + cU^2 + dU^3$. Comme $U^4 = I_4$, la suite des puissances de U est périodique et un polynôme en U peut se réécrire comme polynôme de degré au plus 3.
Ainsi $V = \mathbb{Z}[U]$ est stable par multiplication...

2. Remarquons que, d'une façon générale, si M est inversible, son inverse est un polynôme en M. C'est une conséquence standard du théorème de Cayley Hamilton puisque
$$\chi_M(M) = M^4 + uM^3 + vM^2 + wM + (-1)^4 det(M) I_4 = 0,$$
il vient $M(M^3 + uM^2 + vM + wI_4) = -det(M)I_4$... ce qui donne $M^{-1} = \dfrac{-1}{det(M)}(M^3 + uM^2 + vM + wI_4)$.

• Si $M \in V$ a pour déterminant ± 1, on voit immédiatement avec la remarque précédente que $M^{-1} \in V$, donc $M \in G$.

• Réciproquement, si $M \in G$, les matrices M et M^{-1} sont des matrices à coefficients entiers. Leur déterminants sont des entiers et $det(M)det(M^{-1}) = det(MM^{-1}) = det I_4 = 1$. Ainsi $det(M)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$ et vaut ± 1.
Existe-t-il des matrices de déterminant 1 et -1 dans V ?
La réponse est oui avec $det(U) = -1$ et $det(I_4) = 1$...

3. Un groupe standard isomorphe à G ?

14.4 Indication ou corrigé 2.4

1. Considérons $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On sait qu'il existe au moins une matrice $A' = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ telle que $AA' = \det(A) I_2$. C'est la transposée de la comatrice de A.
Au cas où on l'aurait oublié, dans le cas n=2, on la retrouve en résolvant un système linéaire $AX = \det(A) I_2$.

2. Considérons alors deux matrices A et B dont les déterminants α et β sont premiers entre eux. Le théorème de Bezout dans $\mathbb{Z}$ nous permet d'affirmer qu'il existe deux entiers u et v tels que $\alpha u + \beta v = 1$.
   Observons qu'il existe deux matrices à coefficients entiers, A' et B' telles que $AA' = \det(A) I_2 = \alpha I_2$ et $BB' = \det(B) I_2 = \beta I_2$.
   Ainsi,
   $$A(uA') + B(vB') = AU + BV = \alpha u I_2 + \beta v I_2 = I_2.$$
   De cela on déduit que $\mathcal{J} = \{AU + BV / (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
3. Même démonstration, il suffit de connaître l'existence de la comatrice définie par
   $$Com(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \times det(A_{i,j})$$
   où $A_{i,j}$ est la matrice de taille n-1 obtenue en enlevant à A sa colonne j et sa ligne i. On sait que
   $$A \times {}^t Com(A) = det(A) I_n.$$
   Une impasse dans laquelle je me suis souvent jeté : on a envie de considérer $\mathcal{J} = \{AU + BV / (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2\}$.
   C'est **un idéal à droite** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. En effet,
   - $\mathcal{J}$ est un **sous groupe** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ car $O \in \mathcal{J}$ et la différence de deux éléments $AU + BV$ et $AU' + BV'$ de $\mathcal{J}$ appartient à $\mathcal{J}$.
   - $\mathcal{J}$ est **absorbant à droite** : pour toute matrice $(AU + BV) \in \mathcal{J}$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on a $(AU + BV)\,M = AUM + BVM \in \mathcal{J}$.

   Mais cela s'arrête vite car rien ne dit a priori que l'ensemble $\mathcal{J}'$ des déterminants des éléments de $\mathcal{J}$ soit lui même un idéal de $\mathbb{Z}$.
   En effet, bien que $\mathcal{J}'$ soit absorbant (si $d = det(AU+BV)$, si $m \in \mathbb{Z}$, alors $md = det(AUM + BVM)$ avec $M = diag(m, 1, ..., 1)$, est un élément de $\mathcal{J}'$), il n'est pas évident que $\mathcal{J}'$ soit un sous groupe de Z (une partie absorbante n'est pas toujours un sous-groupe dans $(\mathbb{Z}, +)$ (penser à $\{x \in \mathbb{Z} / |x| \geq 3 \text{ ou } x = 0\}$).

14.5 Indications ou corrigé 2.5

1. **"Le" plus petit groupe non commutatif**
   • Savoir que les groupes de permutations donnent des exemples de groupes non commutatifs finis est d'un grand réconfort avant d'aborder l'exercice. Commençons donc par la fin et explicitons le groupe $\mathcal{S}_3$ des $3\,!$ =6 permutations de $\{1, 2, 3\}$:
   $$id, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
   Ce groupe n'est pas commutatif parce que $\tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_1 \neq \tau_2 \circ \tau_1 = \sigma_2$.
   • Que dire des groupes à n éléments lorsque [11]
   (a) n=1 : $G = \{e\}$ est commutatif ;
   (b) n=2 : $G = \{e, a\}$ a pour table $\begin{array}{c|cc} \star & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array}$, il est commutatif

11. rappelons qu'une table de groupe liste les éléments dans chaque ligne et chaque colonne

(c) n=3 : $G=\{e,a,b\}$ a pour seule table possible celle obtenue avec $a\star a=b$, à savoir :

$$\begin{array}{c|ccc} \star & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & b & \\ b & b & & \end{array}$$

(en quoi on reconnaît $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) car en plaçant $a\star a=e$ on arrive à une impossibilité :

$$\begin{array}{c|ccc} \star & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & e & \\ b & b & & \end{array}$$

. Le choix de $a\star a$ conditionne en effet le reste (la lectrice remplira), $(G,\star)$ est commutatif et isomorphe à $\mathbb{Z}/3.\mathbb{Z}$

(d) n=4 : $G=\{e,a,b,c\}$.
Mieux vaut réfléchir avant de chercher tous les cas : d'après le théorème de Lagrange, les sous-groupes de G sont d'ordre 1, 2 ou 4.
• si G admet un sous-groupe d'ordre 2, par exemple $\{e,a\}$, sa table s'écrit en partie :

$$\begin{array}{c|cccc} \star & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & & \\ b & b & & & \\ c & c & & & \end{array}$$

d'où $b\star a=c$, puis

$$\begin{array}{c|cccc} \star & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & & \\ c & c & b & & \end{array}$$

;
Il reste deux façons de compléter selon que $b\star b=e$ ou $b\star b=a$:

$$\begin{array}{c|cccc} \star & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & e & a \\ c & c & b & a & e \end{array}$$

où l'on reconnaît $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, puis

$$\begin{array}{c|cccc} \star & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & a & e \\ c & c & b & e & a \end{array}$$

où l'on reconnaît $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec $a=\bar{2}$...

• Si G n'admet pas de sous-groupe d'ordre 2, il n'admet pas de sous-groupe non trivial. Tout élément autre que e est générateur, $G=\{w^0,w^1,w^2,w^3\}$ avec $w^4=e$. Il y a une contradiction parce qu'alors $(w^2)^2=e$...
• les seuls groupes d'ordre 4 sont, à un isomorphisme près, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, commutatifs.

(e) n=5 : d'après le théorème de Lagrange, les sous groupes de G sont d'ordre 1 ou 5. Cela impose que G est cyclique : en effet, le sous-groupe engendré par un élément différent du neutre est d'ordre 5 c'est donc G. Un groupe monogène est évidemment commutatif (ici isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$);

Bilan : avant n=6, point de salut...

2. **Les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.**
• Observons tout d'abord que si $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, son image par le morphisme canonique $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. A l'inverse, si G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\phi^{-1}(G)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui est donc de la forme $a\mathbb{Z}$. Ainsi, $G=\phi(\phi^{-1}(G))=\bar{a}\mathbb{Z}$.
Les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont donc les groupes de la forme avec $\bar{a}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{a}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, a\in\{0,1,...,n-1\}$...

• Je regarde alors les sous groupes de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, par exemple :
$\{0\}$,
$<1>=<5>=<7>=<11>=<13>=<17>=\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$,
$<2>=<4>=<8>=<10>=<14>=<16>=\{0,2,4,6,8,10,12,14,16\}$,
$<3>=<15>=\{0,3,6,9,12,15\}$,

$< 6 >=< 12 >= \{0, 6, 12\}$,
$< 9 >= \{0, 9\}$,
Conjecture : les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont de la forme $< d >$ où $d|n$.

• Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, Considérons b le plus petit entier tel que $G = \{\bar{0}, \bar{b}, 2\bar{b}, ...(k-1)\bar{b}\}$. k est l'ordre de ce sous-groupe et il divise n d'après le théorème de Lagrange. Nous avons donc donc $n = k\alpha$ et $n = k\alpha | kb$. Nous pouvons donc écrire $b = \alpha\beta$. Les deux sous-groupes $G = \{0, \alpha\beta, 2\alpha\beta, ..., (k-1)\alpha\beta\}$ et $\{0, \alpha, 2\alpha, ..., (k-1)\alpha\}$ sont du même ordre k. Ils sont égaux puisque le générateur du premier $\alpha\beta$ appartient au second (ce qui entraîne l'inclusion).
• Combien $n = \prod p_i^{\nu_i}$ admet il de diviseurs compris entre 0 et $n-1$? Autant que de nombres $\prod p_i^{\mu_i}$ avec $0 \leq \mu_i \leq \nu_i$, à savoir $\prod(\nu_i + 1)$.

3. On écrit les cubes dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Tiens voilà qui est remarquable ! Mais alors si la somme de 3 cubes est nul l'un deux nécessairement est.. est .. ?

14.6 Indications ou corrigé 2.6

1. Dans un tel cas $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3[4]$ et 3 n'est pas un carré modulo 4.
2. Si $x^y = y^x$, x et y ont les mêmes diviseurs premiers. Décomposons : $x = \prod p_i^{\alpha_i}, y = \prod p_i^{\beta_i}$ sur le même ensemble d'indices, les exposants étant non nuls. On a donc

$$x^y = \prod p_i^{\alpha_i y} = \prod p_i^{\beta_i x} = y^x,$$

d'où par unicité de la décomposition : $\alpha_i y = \beta_i x$ pour tout i et

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = ... = t$$

— si t=1 on obtient les solutions évidentes $x = y$;
— supposons donc $t > 1$. On a $x = ty$ et $\alpha_i = t\beta_i > \beta_i$ pour tout i; ainsi, $t = \prod p_i^{\alpha_i - \beta_i} = y^{t-1}$ et t est entier.
L'équation $x^y = y^x$ est équivalente à $t = y^{t-1}$, $x = ty$ avec x, y, t entiers strictement supérieurs à 1. On peut donc rechercher les entiers $t \geq 2$ tels que

$$\phi(t) = t^{\frac{1}{t-1}} = e^{\frac{\ln t}{t-1}} \in \mathbb{N}.$$

Une étude rapide de cette fonction montre que $\phi \searrow$ sur $[0, +\infty[$, que $\phi([0, +\infty[) =]1, e]$ et que $\phi(2) = 2$. Notre seule solution est donnée par $t = 2, y = 2, x = 4$.
On a bien $4^2 = 2^4 = 16$.
— le cas $t < 1$ se déduit du cas $t > 1$ en permutant x et y qui jouent le même rôle ;
Bilan : $x^y = y^x \Leftrightarrow x = y, (x, y) = (4, 2), (x, y) = (2, 4)$.

3. Comme $143 = 13 \times 11$ n'est pas premier, $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$ contient des diviseurs de 0 ! On commence par écrire : $X^2 - 4X + 3 = (X-2)^2 - 1 = (X-3)(X-1) = 0$, ainsi X est solution ssi $X - 2$ est racine carrée de 1 (penser que l'on a comme solutions apparentes $X = 1, 3$ mais aussi 14 car $14 - 1 = 13$ et $14 - 3 = 11$...)
On recherchera donc les racines de 1 :
$q^2 = 1 \equiv 143 \Leftrightarrow 143 = 13 \times 11 | (q-1)(q+1)$, on a donc
— $143 | q - 1$ (et $q = 1$)
— ou $143 | q + 1$ (et $q = -1$)

— ou $11|q-1$ et $13|q+1$
— ou $13|q-1$ et $11|q+1$

Plaçons nous par exemple dans ce dernier cas.
On a $q = 1 + 13\alpha$, $q = -1 + 11\beta$ d'où $13\alpha - 11\beta = -2$. Les solutions de cette dernière équation sont $\alpha = -1 + 11k$, $\beta = -1 + 13k$ (une solution particulière évidente ou donnée par l'algorithme d'Euclide étendu à la relation de Bezout, plus une solution générale de l'équation homogène).
On en déduit $q = 1+13\alpha = -1+11\beta = -12+143k = -12 mod 143$. Cela donne $X-2 = -12$ ou $X = -10$...

Le programme MAPLE qui suit donne les racines de 1 dans $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$:

```
> restart;
>1234 mod 143;
```

$$90$$

```
> s:=NULL;
> for q from 0 to 142 do
>   if q^2 mod 143 = 1 then s:=s,q; fi;
> od;
> s;
```

$$s :=$$

$$1, 12, 131, 142$$

On en déduit $X = q + 2 = 3, 14, 133 = -10, 144 = 1$.

4. **Une petite conjoncture ne peut pas nuire** (c'est un exo des Mines, MAPLE présent).

```
> restart;
> F:=n->2^(2^n)+1:
> a:=F(2);
> b:=F(8);
```

$$a := 17$$

$$b := 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639937$$

```
> iquo(b,a);
> irem(b,a);
```

$$6811299366900952671974763824040465167839410862684739061144563765\ 171360567055$$

$$2$$

Si nous montrons que $F_n = qF_m + 2$, le tour est joué puisque c'est là la première division de l'algorithme d'Euclide, la seconde et dernière sera $F_m = 2q' + 1$ puisque F_m est impair. Aussi traité dans le (14.21).

14.7 Indication ou corrigé *2.7*

1. Puisque p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, les solutions de $(x-\bar{1})(x+\bar{1}) = \bar{0}$ sont donc ± 1;

2. Ecrivons le produit des éléments non nuls (qui sont donc tous inversibles) :

$$(p-1)! = \bar{1} \times \bar{2} ... \times \overline{(p-2)} \times \overline{(p-1)} = -\bar{2} ... \times \overline{(p-2)};$$

dans ce dernier produit chaque élément figure avec son unique inverse (seuls 1 et -1 sont leurs propres inverses...).

3. Lorsque n est premier, $(n-1)! \equiv -1 \equiv (n-1)[n]$.
Lorsque $n > 1$ n'est pas premier,
— si $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ avec des p_i distincts, alors chaque $p_i^{\alpha_i}$ figure dans la liste des entiers $2, 3, ..., n-1$ et $(n-1)! = 0[n]$.
— si $n = p^\alpha$, si $\alpha \geq 3$, $p, p^{\alpha_i - 1}$ figurent dans le produit $(n-1)!$
— si $n = p^2$, $(n-1)! = 1.2...(p^2-1)$ et cette somme contient à la fois p et $2p$, sauf si $2p = n = p^2$; ce cas correspond à $n = 2^2 = 4$.
Bilan : si n est premier $(n-1)! \equiv -1[n]$, si $n \neq 4$ n'est pas premier, $(n-1)! \equiv 0[n]$.

14.8 Indication ou corrigé *2.8*

1. Si $(X^3 - 2)$ est un produit de polynômes non constants de $\mathbb{Q}[X]$, soit $P(X) = A(X)B(X)$, on a $\deg(A) + \deg(B) = 3$. Les coefficients dominants peuvent être choisis égaux à 1. Ainsi, par exemple $A(X) = (X - p/q)$.
Dans ce cas $P(X) = (X - p/q)B(X)$ et le rationnel p/q est racine de $P(X)$. Montrons la contradiction. On supposera p et q premiers entre eux.
— $(p/q)^3 = 2 \Rightarrow p^3 = 2q^3 \Rightarrow 2|p$ et $4p'^3 = q^3$.
— Ainsi, $2|q$ également. Contradiction.

2. $H = \{a + b\beta + c\gamma; ...\}$ avec $\beta = 2^{1/3}$, $\gamma = 4^{1/3}$. H est stable par combinaisons linéaires à coefficients rationnels, c'est un $\mathbb{Q}-$ev comme sev de $\mathbb{R}$. Observons que

$$\beta^2 = \gamma, \ \beta\gamma = 2, \ \gamma^2 = 2\beta.$$

Le produit $(a + b\beta + c\gamma) \times (a' + b'\beta + c'\gamma)$ de deux éléments de H est un élément de H :

$$(aa' + 2(cb' + c'b)) + (ab' + a'b + 2cc')\beta + (ac' + a'c + bb')\gamma.$$

Comme $1 \in H$, H est un sous-anneau de R (sous-groupe additif, stable par $\times$, contenant 1). et une sous-algèbre (car sev et sous-anneau).

3. Base : montrons que la partie $\mathbb{Q}-$génératrice $(1, \beta, \gamma)$ est libre sur $\mathbb{Q}$. Si $a + b\beta + c\gamma = 0$, on a, en supposant tout d'abord $b \neq 0$:
— $\beta + c/b\gamma = -a/b$; $c/b\beta\gamma = 2c/b$;
— β, $c/b\gamma$ sont racines du polynôme $(X^2 + a/bX + 2c/b) \in \mathbb{Q}[X]$;
— Nous avons vu que le polynôme $X^3 - 2$ est le polynôme minimal de β puisqu'il est irréductible (et que l'idéal annulateur de $\beta = 2^{1/3}$ dans $\mathbb{Q}[X]$ est engendré par un seul élément comme tout idéal de $\mathbb{Q}[X]$. Contradiction.
Le cas $b = 0, c \neq 0$ conduit à γ rationnel, or il ne l'est pas...

14.9 Indications ou corrigé *2.9*

1. Nous allons tout d'abord nous intéresser aux ordres de multiplicité des éléments de G. Rappelons que l'ordre d'un élément $x \in G$ est l'ordre (le cardinal) du sous groupe qu'il engendre. Ce groupe, monogène par construction, est fini, car contenu dans G; il est cyclique et on le note $< x >= \{x^0, x^1, ..., x^{m-1}\}$.

   • si x et y sont des éléments de G d'ordre m et n premiers entre eux, alors $x\,y$ est un élément d'ordre mn. En effet,
   — $(x\,y)^{nm} = (x^m)^n\,(y^n)^m = e$ (le groupe est commutatif, rappelons le) ;
   — pour tout $r \in \mathbb{N}$, si $(x\,y)^r = e$, on a aussi $((x\,y)^r)^n = x^{r\,n}(y^n)^r = x^{r\,n} = e$. Comme x est d'ordre m, cela impose $m|r\,n$. Comme m et n sont premiers entre eux, $m|r$ (thm de Gauss). De façon symétrique $n|r$ et $(m\,n)|r$.
   Bilan : le plus petit entier strictement positif tel que $(x\,y)^r = e$ est $r = m\,n$.

   • si x et y sont des éléments de G d'ordre m et n , alors il existe dans G un élément d'ordre $\mu = \mathrm{ppcm}(n, m)$. En effet, avec $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$ et $\mu = d\dfrac{m}{d}\dfrac{m}{d}$ s'écrit $\mu = m'\,n'$ où (m', n') sont premiers entre eux. D'après la remarque précédente, il existe un élément $z \in G$ d'ordre $\mu = m'\,n'$.

   • Il existe alors un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.

2. **Il s'agit d'un faux exercice ! Cela ressemble à une question de cours de L_3. M'enfin !**
   Notons $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,)^\times$.
   Tout élément $a \in G$ est d'ordre fini ; cet ordre divise le cardinal de G (théorème de Lagrange) et l'on a $a^{p-1} = 1$ (c'est le théorème d'Euler que l'on peut démontrer sans faire appel au thm de Lagrange). Le ppcm r, des ordres des éléments de G est donc un diviseur de $(p-1)$. Introduisons le polynôme $(X^r - 1)$ sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Tout élément $x \neq 0$ est racine de ce polynôme. Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps $(X - a)|(X^r - 1)$ et
   $$(X - 1)(X - 2)...(X - (p - 1))|(X^r - 1).$$
   Cela impose $r \geq p - 1$ et donc $r = p - 1$.
   D'après la question précédente, il existe un élément d'ordre r. Cet élément engendre un groupe de $(p - 1)$ éléments qui est donc égal à G.

14.10 Indication ou corrigé *2.10*

1. Ce groupe multiplicatif est formé des classes des entiers premiers avec $32 = 2^5$. Il s'agit donc des classes des impairs :
   $$(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}\,)^\times = \{\}$$
   Considérons le sous-groupe (nécessairement cyclique) formé des puissances de la classe de 5 :
   $$< \bar{5} >= \{\}.$$
   Ce sous-groupe contient 8 éléments. Il est remarquable que les inversibles qui ne s'y trouvent pas sont les opposés des puissances de 5, et on le remarque donc.
2. Un élément de $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}\,)^\times$ est ainsi de la forme $z = (-1)^j \times 5^k$ avec $j = 0, 1$ et $k = 0, 2, ..., 7$. Cela conduit à poser pour $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$,
   $$f(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^x \times \bar{5}^y.$$

- - f est ainsi bien définie ;
si $x \equiv x'[2]$, $(-1)^x \equiv (-1)^{x'}[32]$;
si $y \equiv y'[8]$, $(5)^x \equiv (5)^{y'}[32]$ car $\overline{5}^{y'} = \overline{5}^y \overline{5}^{8k} = \overline{5}^y$.
- - vue la remarque en fin de question précédente, f est surjective donc bijective (les ensembles ont même cardinal)
- - f est un morphisme de groupe puisque

$$f((x,y)+(x,y')) = f(x+x',y+y') = (-1)^{x+x'}5^{y+y'} = (-1)^x 5^y \times (-1)^{x'}5^{y'} = f(x,y)+f(x',y').$$

14.11 Indication ou corrigé *2.11*

Cet exercice me paraît difficile (l'énoncé vient de OT) le précédent est une bonne approche par un exemple ;

1. (a) Récurrence (élever au carré) ;
   (b) Le sous-groupe engendré par 5 est de la forme $\{5^0, 5^1, ..., 5^{\omega-1}\}$, où ω est l'ordre de 5. Cet ordre divise celui du groupe G des inversibles (théorème de Lagrange, hors programme), c'est une puissance de 2.
   La relation établie montre que $5^{2^k} = 1 + 2^{k+2} + t2^{k+3}$ est différent de 1 dans $\mathbb{Z}/2^p\mathbb{Z}$ pour $0 \leq k \leq p-3$ alors que $5^{2^{p-2}} = 1$ dans $\mathbb{Z}/2^p\mathbb{Z}$. 5 est donc d'ordre 2^{p-2}.
   (c) Les éléments 5 et -1 engendrent des sous-groupes d'ordres 2^{p-2} et 2. Les éléments de la forme $(-1)^u 5^v$ avec $u = 0, 1$ $v = 0, ...2^{p-2}$ sont au plus 2^{p-1}, l'ordre de G. Ils sont distincts car -1 n'est pas une puissance de 5 dans $\mathbb{Z}/2^p\mathbb{Z}$.

14.12 Indication ou corrigé *2.12*

1. $\Phi_n(X)$ est le produit de $\phi(n)$ polynômes $(X - \zeta)$ où ϕ est l'indicateur d'Euler ;
2. Lorsque p est premier toutes les racines $n^{ième}$ de l'unité sauf 1 sont primitives. On a donc

$$\Phi_n(X) = \frac{X^n - 1}{X - 1} = X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1.$$

   Lorsque $n = p^s$, les racines non primitives sont de la forme $\omega^{pk} = (\omega^p)^k = \mu^k$ où $\omega = e^{2i\pi/p^s}$, $\mu = \omega^p = e^{2i\pi/p^{s-1}}$ et $0 \leq k \leq p^{s-1} - 1$. Ainsi,

$$\Phi_{p^s}(X) = \frac{X^{p^s} - 1}{\prod_{k=0}^{p^{s-1}-1}(X - \mu^k)}.$$

   On reconnaît là, puisque μ est racine primitive p^s-ième de l'unité :

$$\Phi_{p^s}(X) = \frac{X^{p^s} - 1}{(X^{p^{s-1}} - 1)} = \frac{Y^p - 1}{Y - 1} = \Phi_p(Y).$$

3. $\Phi_1(X) = (X-1)$, $\Phi_2(X) = (X+1)$, $\Phi_3(X) = (X^2+X+1) = (X-j)(X-\bar{j})$, $\Phi_4(X) = (X^2+1)$, $\Phi_5(X) = (X^4+X^3+X^2+X+1)$ et enfin, $\Phi_6(X) = (X^2-X++1 = (X-e^{\pi/3})(X-e^{-\pi/3})$; Nous avons bien là $X^6 - 1 = \Phi_1(X)\Phi_2(X)\Phi_3(X)\Phi_6(X)$...
4. Généralisons : $X^n - p$ est le produit des $(X - \zeta)$ où ζ est une quelconque des racines $n^{ième}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$. Chacune de ces racines à un ordre qui est un diviseur n. C'est une conséquence du théorème de Lagrange par exemple. On observe alors qu'une racine ζ est d'ordre d ssi d est le plus petit entier strictement positif tel que $\zeta^d = 1$. ζ est donc est aussi une **racine primitive** $d^{ième}$ de 1.

14.13 Indication ou corrigé *2.13*

1. • On commencera par observer que les i^{ieme} composantes des éléments de G forment un sous-groupe $d_i\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{Z},+)$. En effet, l'application

$$X_i : z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{Z}^n \to z_i \in \mathbb{Z}$$

est un morphisme de groupe et $X_i(G)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$..
• Etudions les sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$: il existe un élément $u \in G$ tel que $X_1(u) = d_1$. u est donc de la forme $u = (d_1, y_u)$.
Considérons alors le morphisme de G dans lui-même défini par

$$f : z \in G \to z - \frac{X_1(z)}{d_1}u = (0, y - \frac{x}{d_1}y_u).$$

On vérifie sans peine que f est une application de G dans lui-même et que c'est un morphisme de groupes. $f(G)$ est composé d'éléments de la forme $(0, \theta_2 p),\ p \in \mathbb{Z}$ puisque c'est un sous-groupe de $(G,+)$. Un élément quelconque de G s'écrit $(x,y) = (\alpha d_1, y)$ et vérifie

$$y - \frac{x}{d_1}y_u = \theta_2 p.$$

Deux cas sont à envisager :
— $\theta_2 = 0$, alors les éléments de G sont de la forme $\alpha(d_1, y_u) = \alpha u$. Comme G est un groupe tout élément de cette forme est dans G.
$G = \{\alpha(d_1, y_u),\ \alpha \in \mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\}$.
— $\theta_2 \neq 0$, les éléments de G sont de la forme

$$(x,y) = \alpha(d_1, y_u) + \beta(0, \theta_2),$$

nous avons là une "partie génératrice " de G tant est évidente l'inclusion réciproque...
$G = \{\alpha(d_1, y_u) + \beta(0, \theta_2),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.
• On poursuit avec une récurrence sur n;
2.

14.14 Indication ou corrigé *2.14*

1. Montrons que $L = 1$ en raisonnant par l'absurde.
Supposons que $L > 1$: il existe un rang n_0 à partir duquel $f(n) > n$, dans ce cas les entiers $p \in [0, n_0]$, ont des antécédents dans $[0, n_0 - 1]$. Cela met à mal la surjectivité.
Supposons que $L < 1$: il existe un rang n_0 à partir duquel $f(n) < (1-a)n$;
Considérons alors $n_1 = \sup\{f(p);\ p \in [0, n_0 - 1]\}$ que deviennent les images des éléments de $[0, n]$ lorsque $n \geq \sup(n_0, n_1)$?
— si $p \in [0, n_0 - 1]$, son image est dans $[1, n_1]$;
— si $p \in [n_0, n]$, son image est dans $[1, [(1-a)n]]$;
si nous supposons en plus que $(1-a)n$ est choisi supérieur à n_1, l'injectivité est mise à mal puisque f envoie $[0, n]$ sur $[0, [(1-a)n]]$.
2. Les nombres en question sont de la forme

$$n = \sum_{k=0}^{d} 10^k = \frac{1 - 10^{d+1}}{1 - 10} = \frac{1}{9}(10^{d+1} - 1).$$

On observe que $3|111 = 3 \times 37$, nous pouvons considérer maintenant un nombre premier p, plus grand que 5.
Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $9 = 3^2$ est inversible et $9n = 10^{d+1} - 1,\ n = 9^{-1}(10^{d+1} - 1)$. Comme $10 = 2 \times 5$ est également inversible, il engendre un sous-groupe cyclique de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,)^*$. Il existe donc un exposant pour lequel $10^{d+1} = 1$. Fin.

3.

14.15 Indication ou corrigé *2.15*

1. les calculs donnent
   $f(1) = 0[1], f(2) = 1[2], f(3) = 2[3], f(4) = 2[4], f(5) = 4[5], f(6) = 0[6]...$
2. Comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps les solutions de $x = x^{-1}$ ou de $x^2 = 1$ sont $\pm\bar{1}$ (en effet, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.... Il s'ensuit que

$$\prod_{k=1}^{n-2} \bar{k} = \bar{1}$$

   puisque les facteurs sont non nuls et inversibles, chacun d'eux étant présent avec son inverse. Ainsi, $f(n) = -1$.
3. Passons à n composé, $n = pq$ avec $p \geq 2$ et $q \geq 2$.
   — si $p \neq q$, $(n-1)! = 1.2...p...q...(n-1) = 0[n = pq]$;
   — si $p = q > 2$ on écrira $(n-1)! = 1.2...p...2p...(n-1) = 0[n = p^2]$;
   — On a donc toujours $f(n) = 0$ lorsque n est composé sauf si $n = 4$.

cet exercice parait plutôt facile...

14.16 Indication ou corrigé *2.16*

1. Nous observons tout d'abord que $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \nu_p(k)$, et que $\nu_p(k) = j$ ssi $k = p^j k'$ où $k' \leq \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor$ et $k' \wedge p = 1$...
   Cela commence à ressembler à un exercice de dénombrement. On observe alors que

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \nu_p(k) = \sum_{j \geq 1} j \times \#\{k \in [1, n]; \nu_p(k) = j\}.$$

   Que représente le nombre $\lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor$?
   Zieutons pour $n = 28$ et $p = 5$:
   — $\lfloor \frac{28}{5^1} \rfloor = 5$, et c'est le nombre des entiers de $[1, 28]$ tq $5|k$, à savoir : 5,10,15,20,25 ;
   — $\lfloor \frac{28}{5^2} \rfloor = 1$, et c'est le nombre des entiers de $[1, 28]$ tq $5^2|k$;
   — Si nous faisons le bilan, les entiers $k = p^1 k'$ avec $k' \wedge 5 = 1$ sont dénombrés 1 fois alors que $k = 5^2 k'$ est dénombré deux fois.

   Généralisons : Que représente $\sum_{j \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor$? Notons $a_j = \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor$.
   — pour tout k' tq $1 \leq k' \leq a_1$, $k = k'p \leq n$;
   — pour tout k' tq $1 \leq k' \leq a_2$, $k = k'p^2 \leq n$; ces entiers figurent dans la liste précédente.
   — pour tout k' tq $1 \leq k' \leq a_j$, $k = k'p^j \leq n$; ces entiers figurent dans les listes précédentes.
   — si j est le plus grand entier $p^j|k \in [1, n]$, k figure dans j listes exactement.
   — En conséquence,

$$\sum_{j \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor = \sum_{j \geq 1} j \times \#\{k \in [1, n]; \nu_p(k) = j\}.$$

2. Comme $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$ la décomposition en facteurs premiers est donc

$$\prod p^{\nu_p((2n)!) - 2\nu_p(n!)}.$$

D'autre part,

$$\nu_p((2n)!) - 2\nu_p(n!) = \sum_j \left(\lfloor \frac{2n}{p^j} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor \right) = \sum_j (a_j - 2b_j),$$

les termes de cette somme sont nuls dés que $p^j > 2n$ ou $j > \lfloor \frac{\ln 2n}{\ln p} \rfloor$.

Observons que pour chaque entier j, $a_j \leq \dfrac{2n}{p^j} < a_j + 1$ et $b_j \leq \dfrac{n}{p^j} < b_j + 1$, d'où l'on déduit que $0 \leq a_j - 2b_j \leq 1$, ce qui, la somme ayant au plus $\lfloor \dfrac{\ln 2n}{\ln p} \rfloor$ termes non nuls, donne :

$$\binom{2n}{n} \text{ divise } \prod_p p^{\lfloor \frac{\ln 2n}{\ln p} \rfloor}.$$

3. Montrer que
$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$$
4. Montrer que
$$\frac{x}{\ln x} = \mathcal{O}(\pi(x)).$$

14.17 Indications ou corrigé 2.17

il est corrigé avec le suivant, dont les questions sont autant d'indications...

14.18 Indication ou corrigé *2.18*

1. D'une façon générale, dans un groupe commutatif, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe :
   Si $a \in G$, l'application $x \in\in G \to ax \in G$, est une bijection et les deux produits qui suivent sont les mêmes :
   $$\prod_{x \in G} ax = \prod_{x \in G} x,$$
   et $a^{ordre(G)}$.
   Si p est premier, $xZp^{\times}$ est d'ordre $p-1$, donc lorsque a et p sont premiers entre eux,$a^{p-1} = 1[p]$.
   Avec le théorème de Lagrange : l'ordre d'un sous groupe divise l'ordre du groupe...
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
   (a) $\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i_1=1}^n a_{i,i}^2 + 2\sum_{i<j}^n a_{i,j}a_{j,i}$. Le calcul modulo 2 est évident avec ce qui précède...
   (b) Par une récurrence (on part de la définition du produit matriciel) :
   $$Tr(A^p) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n ... \sum_{i_p=1}^n a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times ...a_{i_p,i_1}.$$
   (c) $a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times ...a_{i_p,i_1}$ apparaît $\dfrac{p!}{q_1!...q_k!}$ fois dans la somme et ce terme est un multiple de p lorsque p est premier sauf si $k = 1$ et $q_1 = n$.
   (d) $\mathrm{Tr}(A^p) = \sum a_{i,i}^p +$ termes facteurs de p, et on termine avec Fermat.
3. Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ donnée par $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2$ et
   $$u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$$
   pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que p divise u_p.

14.19 Indication ou corrigé *2.19*

1.
2.

14.20 Indication ou corrigé *2.20*

1. Soit q un entier. Nous avons dans $\mathbb{Z}[X]$ la factorisation partielle :

$$X^q - 1 = (X-1)(X^{q-1} + X^{q-2} + ... + 1) \tag{14.1}$$

   Lorsque $q = 2p+1$ est impair, -1 est racine de $X^q + 1$ et

$$X^q + 1 = (X+1)(X^{q-1} - X^{q-2} + ... - X + 1) \tag{14.2}$$

   Lorsque $q = 2p$ est pair, les choses se compliquent, selon que q est une puissance de 2 ou pas

$$\begin{aligned}
X^4 + 1 &= (X^2 + i)(X^2 - i) && (14.3)\\
&= (X + e^{i\pi/4})(X - e^{i\pi/4})(X + e^{3i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4}) && (14.4)\\
X^6 + 1 &= ((X^2)^3 + 1) && (14.5)\\
&= (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) && (14.6)\\
X^{2^r(2p+1)} + 1 &= ((X^{2^r})^{2p+1} + 1) && (14.7)\\
&= (X^{2^r} + 1)(X^{2^{r(p-1)}} - X^{2^{r(p-2)}} + ... - X^{2^r} + 1) && (14.8)
\end{aligned}$$

   Remarque : lorsque nous savons factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^{2p} + 1 = \prod_{k=0}^{2p-1} (X - e^{i\pi/2p} e^{2ik\pi/2p}) \tag{14.9}$$

2. Soient $a > 1$ et $n > 0$, deux entiers. Montrer que si $a^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.

14.21 Indication ou corrigé *2.21*

$F_n = 2^{2^n} + 1$

1. Calculons, conjecturons , déconjecturons.

```
F:=n->2^(2^n)+1;

n:=0:
while isprime(F(n)) do
  F(n);
  n:=n+1;
od;
F(n);
ifactor(F(n));
```

   Pour n=5, $F_5 = 4294967297 = (641) \times (6700417)$ est le premier nombre de Fermat composé...

2. Calculons les premiers produits $\prod_{k=0}^{n} F_k$; on conjecture et démontre facilement que $\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} + 2$.

3. La relation qui précède, pour $m > n$ se réécrit :

$$(-1)F_m + \left(\prod_{k\neq n, 0\leq k<m} F_k\right) F_n = 2.$$

Ainsi, si d divise à la fois F_n et F_m, il divise 2. Comme F_n est impair, $d = 1$.
On a montré que F_n et F_m sont premiers entre eux.

14.22 Indications ou corrigé 2.22

On sait que $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$ et en multipliant par $x-1$, faisant $x = 1$, on trouve $a = -1$, puis $b = 1$. Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{-1/2}{1-x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

Pour ce qui est du rayon de convergence, soit on observe que les deux séries géométriques ont deux rayons distincts $R' = 1$ et $R" = 2$, leur somme a donc pour rayon $R = \inf(R', R") = 1$; soit on calcule directement la rayon avec la règle de d'Alembert qui ici fait l'affaire.

14.23 Indication ou corrigé *2.23*

1. **Analyse** Partons de la relation $P(X^2) = P(X)P(X-1)$. On observe que si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine, alors,
   — en faisant $X = \alpha$ dans la relation, il vient :
   $$P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha - 1) = 0 \tag{14.10}$$
   — en faisant $X = \alpha + 1$ dans cette même relation, il vient :
   $$P((1+\alpha)^2) = P(\alpha+1)P(\alpha) = 0 \tag{14.11}$$
   Cela conduit aux racines, $(\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{2n}, ...)$ et $(\alpha, (\alpha+1)^2, ..., r_n, r_{n+1} = (r_n+1)^2, ...)$

   Observons que si P admet une racine de module différent de 1, il admet une infinité de racines et il est nul. Considérons donc $P \neq 0$ dont les racines sont de module 1 et raisonnons sur une telle racine, α.
   Observons que $(\alpha+1)^2$ est racine ;
   — si $|\alpha+1|^2 \neq 1$, $P = 0$, contradiction ;
   — si $|\alpha+1|^2 = 1$, cela impose $\alpha^3 = 1, \alpha \neq 1$, donc $\alpha = j$ ou j^2. En observant que $\alpha + 1 = -\alpha^2$, les seules racines possibles sont α, α^2 car $(\alpha+1)^2 = \alpha$.
   Écrivons donc $P(X) = a(X-j)^p(X-j^2)^q$, d'où
   $$P(X^2) = a(X^2-j)^p(X^2-j^2)^q,$$
   $$P(X)P(X-1) = a^2(X-j)^p(X-j^2)^q(X-j-1)^p(X-j^2-1)^q$$
   on identifie donc :
   $$a(X-j^2)^p(X+j^2)^p(X-j)^q(X+j)^q = a^2(X-j)^p(X-j^2)^q(X+j^2)^p(X+j)^q...$$
   Cette égalité impose $a = 1$ et $p = q$.
   Ainsi les polynômes solutions, soient n'ont pas de racine (constantes tq $P^2 = P$, soit sont de la forme ci-dessus.

Synthèse à l'évidence, un polynôme tel que $P(X) = (X - j)^p(X - j^2)^p$ est solution. Les solutions de notre problème sont donc les constantes 0 et 1 ainsi que les polynômes $(X - j)^p(X - j^2)^p$

2. On écrit classiquement :

$$X^n + = Q_n(X)(X - 1)^2 + (\alpha_n X + \beta_n),$$

Une équation en $X = 1$, l'autre en dérivant et toujours en $X = 1$.

14.24 Indication ou corrigé *2.24*

1. Table de multiplication du corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Les carrés de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont $\bar{0}, \bar{1}$ et $\bar{4}$.

Les formules de Cramer sont valides comme dans tout corps, en effet, regardons un système d'ordre 2 dont le déterminant est $D = ad - bd \neq \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

une combinaison des lignes $dL_1 - bL_2$ conduit à $Dx_1 = dy_1 - by_2$. Comme D non nul est inversible, il vient (après combinaison analogue isolant x_2) :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ b & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

2. Soit F un sur-corps commutatif de $\mathbb{F}_5$ contenant un élément q tel que $q^2 = \bar{2}$.

$$(a + bq)(a' + b'q) = aa' + ba'q + ab'q + bb'q^2 = (aa' + \bar{2}bb') + q(ab' + a'b) \in F.$$

3. Posons :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \text{ et } (a, b) \times (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b);$$

   (a) Vérifions que muni de ces deux lois $F = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ est un corp :
   • Il est clair que $(F, +)$ est un groupe commutatif. En effet la loi $+$ qui vient d'être définie est
   -associative (par associativité de $+$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$),
   -commutative,
   -d'élément neutre $(\bar{0}, \bar{0})$
   et chaque couple (x, y) a pour opposé $(-x, -y)$. l
   • Vérifions que la loi de multiplications est associative, distributive par rapport à l'addition. C'est fastidieux, mais allons y pur la distributivité par exemple

$$((a, b) + (c, d)) * (u, v) = (a + c, b + d) * (u, v) = ((a + c)u + 2(b + d)v, (a + c)v + (b + d)u)$$

$$(a, b) * (u, v) + (c, d) * (u, v) = (au + 2bv, av + by) + (cu + 2cv, cv + cy)$$

   • F contient un élément neutre, le couple $(\bar{1}, \bar{0})$;
   • Il reste à s'assurer que tout élément non nul est inversible : on observe que si $(a, b) \neq (\bar{0}, \bar{0})$, l'équation $(a, b) * (u, v) = (au + 2bv, av + bu) = (\bar{1}, \bar{0})$ conduit à un système de Cramer :

$$\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

En effet, le déterminant $D = a^2 - 2b^2$ est non nul. On le montre en observant que si D=0, soit a=b=0, soit b est non nul et $\bar{2} = (ab^{-1})^2$.
(a, b) admet donc un inverse qui est le couple

$$\left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\right)$$

• Caractéristique : on observe que 5 est le plus petit entier positif tel que $\sum_{i=1}^{p}(\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$... p=5 est bien la caractéristique de ce corps.

(b)

(c) $\mathbb{F}_5$ est isomorphe au sous-corps $\{(a, \bar{0});\ a \in xZ5\}$. Facile...

Cela ressemble à s'y méprendre à une construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$ où -1, non carré de $\mathbb{R}$, est ici remplacé par 2, non carré de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, avec $q^2 = (0, 1)^2 = (2, 0)$ dans F alors que $i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0)$ dans $\mathbb{C}$.

14.25 Indications ou corrigé 2.25

1. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ (groupe des matrices à coefficients entiers de déterminant 1) et f_A définie sur le demi-plan $P = \{z \in \mathbb{C},\ Im(z) > 0\}$ par la relation $f_A(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.

   • L'application $f_A : z \to \dfrac{az + b}{cz + d}$ est définie sur P. En effet, $(c, d) \neq (0, 0)$ et le dénominateur ne s'annule que si si $c \neq 0$ et $cz + d = 0$ soit pour $z = -d/c \notin P$

   • f_A réalise une bijection de P sur lui-même.

   Nous voyons tout d'abord que, si $z = x + iy$, on a

   $$f_A(z) = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + (bc + ad)x + bd + i(ad - bc)y}{|cz + d|^2}$$

   avec $ad - bc = det(A) = 1$. Lorsque $y > 0$, la partie imaginaire de $f_A(z)$ est également positive. Ainsi, $f_A(P) \subset P$.

   • Pourquoi est elle bijective ? Il suffit de résoudre l'équation $f_A(z) = Z$ lorsque $Z \in P$. Cette équation admet une seule solution $z = \dfrac{-dZ + b}{cZ - a} = f_{A^{-1}}(Z)$ puisque $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. Cette solution appartient à P si $Z \in P$ comme nous l'avons vu.

   • $A \in SL_2(\mathbb{Z}) \to f_A$ réalise un morphisme du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le groupe des bijections de P dans lui-même car $f_A \circ f_B = f_{AB}$ (faire les calculs).

   • $f_A = id_P$ ssi pour tout complexe z de partie imaginaire strictement positive, $z = \dfrac{az + b}{cz + d}$. Avec $z = iy, y > 0$ on obtient $iy(ciy + d) = iay + b$ d'où, comme y décrit $\mathbb{R}^+$, $c = b = 0$ et $a = d$... Le noyau est donc formé des matrices I_2 et $-I2$ puisque $ad = 1$.

2. Soit $(G, \star)$, un groupe infini. Deux cas se présentent :
   — Soit il existe un élément x tel que le groupe engendré par x soit infini et alors G admet pour sous-groupes les groupes distincts engendrés par $x^1, x^2, .., x^n, ...$ ce qui lui assure une infinité de sous-groupes (exemple $\mathbb{Z}$) ;

— Soit aucun sous-groupe monogène n'est infini on choisit alors un élément x_0, le groupe $< x_0 >$ qu'il engendre est fini (cyclique), il existe donc $x_1 \in G \setminus < x_0 >$ qui engendre un autre groupe fini,$< x_1 >$; on poursuit le procédé, construisant ainsi par récurrence une suite infinie des sous-groupes cycliques distincts de G...
Existence d'un tel groupe : les suites "finies" d'éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de la forme $(x_0, x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)$ forment un groupe additif infini sans sous-groupe monogène infini.

14.26 Indication ou corrigé *2.26*

1. Soit $HK = \{x \in G / \exists (h,k) \in H \times K, x = h \star k\}$.
   • **Supposons que HK soit un sous-groupe de G.**
   $KH \subset HK$: Considérons $k \star h \in KH$; $k \star h = (h^{-1} \star k^{-1})^{-1} \in HK$ puisque HK est un groupe.
   $HK \subset KH$: considérons $x = h \star k \in HK$. C'est l'inverse de $k^{-1} \star h^{-1} \in KH$. Comme $KH \subset HK$, $x^{-1} = k^{-1} \star h^{-1} = h' \star k'$. Ainsi $x = (h' \star k')^{-1} \in KH$.
   • **On suppose que $HK = KH$, montrons que HK est un groupe :**
   — $e_G \in HK = KH$ (car $e = e \star e$);
   — si $x = h \star k \in HK = KH$, si $y = k' \star h' \in HK = KH$, alors
   $$x \star y = (h \star k) \star (k' \star h') = h \star (k" \star h') = h \star (h" \star k''') \in HK = KH;$$
   — si $x = h \star k \in HK = KH$, alors $x^{-1} = k^{-1} \star h^{-1} \in KH = HK$.
2. Le dernier chiffre de 2004^{2007} est celui de $2004^{2007} \equiv 4^{2007}[10]$. En observant que $4^{3p} = 64^p \equiv 4^p[10]$ et que que $6^2 \equiv 6[10]$, il vient :
   $$\begin{aligned} 2004^{2007} &\equiv 4^{2007} \\ &\equiv 4^{669} \\ &\equiv 4^{323} \\ &\equiv 6 \times 4^{107} \\ &\equiv 6 \times 4^{35} \\ &\equiv 6 \times 4^{33} \\ &\equiv 6 \times 4^{11} \\ &\equiv 6 \times 4^{3} \\ &\equiv 4 \quad [10] \end{aligned}$$
3. Soient a_n et b_n deux entiers tels que
   $$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2} b_n.$$
   • Que vaut $(1 - \sqrt{2})^n$?
   Il y a deux façon de justifier que le "conjugué" est $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2} b_n$:
   - la première, ad hoc, consiste à développer avec la formule du binôme et à séparer les puissances d'exposants pairs et impairs de $(1 \pm \sqrt{2})^n$;
   - la seconde, plus générale et plus instructive, repose sur le fait que
   $$\phi : a + \sqrt{2} b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to a - \sqrt{2} b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$
   réalise un homomorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2} b; (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ dans lui-même.
   On a alors $\phi(z^n) = \phi(z)^n$ avec $z = a + \sqrt{2} b$ et $\phi(z) = a - \sqrt{2} b$.

   • pour vérifier que a_n et b_n sont premiers entre eux, il suffit alors d'observer que
   $$(a_n + \sqrt{2} b_n)(a_n - \sqrt{2} b_n) = a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$$
   et de conclure avec Bezout que, comme leurs carrés, ils sont premiers entre eux.

14.27 Indication ou corrigé *2.27*

• On commence par observer que si G est fini, tout élément de G est cyclique ; G est donc constitué d'homéomorphismes f de $\mathbb{R}$ dans lui-même tels qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f \circ ... \circ f = f^{(p)} = id_{\mathbb{R}}$.
• Commençons par regarder à quoi ressemblent de tels homéomorphismes. Nous savons que si une application continue, f, de $\mathbb{R}$ dans lui-même est bijective, alors elle est strictement monotone et f^{-1} est également strictement monotone et continue. Pour la preuve de ce résultat, on renvoie à la correction de l'exercice détaillé 14.28 ci-dessous.
Supposons que $f^{(p)} = id_{\mathbb{R}}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, la suite des itérés $x_k = f^{(k)}(x)$ est périodique. Si f est croissante cette suite est monotone donc constante. Cela montre que $f = id_{\mathbb{R}}$. Si f est décroissante f^2 est croissante et c'est encore un homéomorphisme de $\mathbb{R}$, donc $f^{(2)} = id_{\mathbb{R}}$. Nous avons de tels exemples avec $x \to -x + c$ et plus généralement avec toute fonction continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est symétrique par rapport à la bissectrice.
• Un sous-groupe fini de $Hom(\mathbb{R})$ est donc engendré par un nombre fini d'homéomorphismes $f_1, ..., f_n$ tels que $f_j^2 = id_{\mathbb{R}}$. Nous pouvons considérer que les f_j sont des fonctions décroissantes (sinon $f_j = id_{\mathbb{R}}$). La fonction $f_i \circ f_j$ est alors un homéomorphisme croissant, comme c'est un élément de G on a $f_i \circ f_j = id_{\mathbb{R}}$ donc $f_i = f_j$.
Bilan : $G = \{id_{\mathbb{R}}\}$ ou $G = \{id_{\mathbb{R}}, f\}$ avec f homéomorphisme décroissant tel que $f^2 = id$...

14.28 Indication ou corrigé 2.28

Le même que le précédent avec des questions intermédiaires.

1. Soit f une bijection continue d'un intervalle I dans J.
   • Montrons qu'elle est strictement monotone.
   • Montrons que f^{-1} est continue :
2. voir le corrigé précédent ;
3. voir le corrigé précédent.

14.29 Indication ou corrigé *2.29*

1. Cours de sup : On pose $Y = X^2$, l'équation devient $Y^2 - 2\cos(2na)Y + 1 = 0$ ce qui donne $X^n = Y = e^{\pm ina}$. Comme on connaît une solution de $X^n = e^{\pm ina}$, les autres s'en déduisent et $X = e^{\pm ia}e^{2ik\pi/N}$ ce qui nous donne 2n solutions de l'équation initiale... On regroupe les conjugués :

$$P(X) = 1 \times \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - e^{ia}e^{2ij\pi/n}\right) \prod_{k=1(sic)}^{n} \left(X - e^{-ia}e^{2ik\pi/n}\right)$$

$$P(X) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - e^{ia}e^{2ij\pi/n}\right)\left(X - e^{ia}e^{2i(n-j)\pi/n}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(a + \frac{2j\pi}{n}\right)X + 1\right).$$

2. Cours de sup : $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

   — De $P(X) = 0$, on déduit $P(X) = XQ(X)$ et on remplace : $(X + 4)XQ(X) = X(X + 1)Q(X + 1)$. On simplifie ($\mathbb{R}[X]$ est un anneau d'intégrité) et il vient :
   — $(X + 4)Q(X) = (X + 1)Q(X + 1)$; on a donc $P(-1) = 0$
3. (Centrale PSI 2007) Montrer que si P vérifie

$$P(X^2) = P(X)P(X - 1)$$

   ses racines sont complexes de module 1. En déduire les polynômes qui vérifient cette relation.

4. (Mines 2007) Montrer qu'il existe un seul polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$A_n\left(X+\frac{1}{X}\right)=X^n+\frac{1}{X^n}.$$

Pour comprendre ce dont il s'agit, on cherchera $A_0, A_1, A_2, ...$ En notant $y=\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$, on a : $A_0(Y)=2; A_1(Y)=Y$; comme $\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2=X^2+2+\dfrac{1}{X^2}$, il vient $A_2(Y)=Y^2+2$ et en développant $\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^3$, on obtient $A_3(Y)=Y^2-3Y$.

Pour généraliser, trois façons de faire :

— $\boxed{\text{M1}}$ La plus rapide :

$$\left(X+\frac{1}{X}\right)\left(X^n+\frac{1}{X^n}\right)=\left(X^{n+1}+\frac{1}{X^{n+1}}\right)+\left(X^{n-1}+\frac{1}{X^{n-1}}\right).$$

La suite des polynômes vérifie donc : $\boxed{YA_n(Y)=A_{n+1}(Y)+A_{n-1}(Y).}$

— $\boxed{\text{M2}}$ Le prolongement des premiers calculs et une autre relation de récurrence :
L'existence est assurée pour $n=0,1$.
On suppose l'existence de A_{2p} et de A_{2p+1} établie, on développe avec la formule du binôme. Avec $n=2p+2, n=2p+3$, on a :

$$\left(X+\frac{1}{X}\right)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}X^{n+1-k}\frac{1}{X^k}=\sum_{k=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}X^{n+1-2k}.$$

L'idée alors est de regrouper les termes d'exposants symétriques et de mêmes coefficients binomiaux comme on l'a fait pour $n=2,3$, en tenant compte de la parité du nombre de termes :

$$\left(X+\frac{1}{X}\right)^{2p+2}=\begin{pmatrix} 2p+2 \\ p+1 \end{pmatrix}+\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} 2p+2 \\ k \end{pmatrix}\left(X^{2(p-k+1)}+\frac{1}{X^{2(p-k+1)}}\right);$$

$$\left(X+\frac{1}{X}\right)^{2p+3}=\sum_{k=0}^{p+1}\begin{pmatrix} 2p+3 \\ k \end{pmatrix}\left(X^{2(p-k+1)+1}+\frac{1}{X^{2(p-k+1)+1}}\right);$$

— $\boxed{\text{M3}}$ On observe que si $A_n(Y)=A_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=\left(X^n+\dfrac{1}{X^n}\right)$, en remplaçant Xpar $e^{i\theta}$ il vient

$$A_n\left(2\cos\theta\right)=2\cos n\theta=2Re\left(\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\cos^{n-k}\theta(i)^k\sin^k\theta\right).$$

C'est très classiquement que l'on garde les termes réels et l'on remplace $\sin\theta$:

$$A_n\left(2\cos\theta\right)=2\sum_{k=0}^{[n/2]}\begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix}(-1)^k\cos^{n-2k}\theta(1-\cos^2\theta)^k\theta...$$

$$A_n\left(Y\right)=2\sum_{k=0}^{[n/2]}\begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix}\frac{Y^{n-2k}}{2^{n-2k+2}}(Y^2-4)^k.$$

5. Montrons que les racines de A_n sont les $x_k = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

   Décomposer $\dfrac{1}{A_n}$ en éléments simples.

14.30 Indication ou corrigé *2.30*

1. Vérification facile : il s'agit de prouver que
   — $G \subset \mathbb{R}^*$, ce qui est conséquence de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (ou de $x^2 - 2y^2 = (x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y) \neq 0$);
   — $1 \in G$ ce qui est évident ;
   — $(z, z') \in G^2 \Rightarrow zz'^{-1} \in G$ ce qui résulte du calcul suivant :

$$zz'^{-1} = \frac{x+\sqrt{2}y}{x'+\sqrt{2}y'} = \frac{(x+\sqrt{2}y)(x'-\sqrt{2}y')}{x'2-2y'^2} = (xx'-2yy') + \sqrt{2}(x'y-xy') \in G$$

   en vérifiant (facilement) que

$$\begin{cases} (xx'-2yy') & > 0 \\ (xx'-2yy')^2 - 2(x'y-xy')^2 & = 1 \end{cases}$$

2. G est monogène ssi il existe z_0 tel que pour tout $z \in G$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z_0^p$. Considérons alors $G+ = G \cap]1, +\infty[$ et notons $\alpha = \inf G+$.
   • α est un élément de $G+$, en particulier $\alpha > 1$.
   En effet, α est limite d'une suite d'éléments de $G+$, $(z_n)_n = (x_n - \sqrt{2}y_n)_n$, pour laquelle

$$\lim(x_n + \sqrt{2}y_n) = \alpha \text{ et } \lim(x_n + \sqrt{2}y_n) = \frac{1}{\alpha}.$$

   On a donc $2\lim x_n = \left(\dfrac{1}{\alpha} + \alpha\right)$. Comme $x_n \in \mathbb{N}^*$, cela impose $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\alpha\right) \geq 2$ et $\alpha > 1$.
   • Montrons que α est générateur de G : considérons un élément $z \in G+$. Si z n'est pas une puissance de α, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^n < z < \alpha^{n+1}$ on a alors, en divisant par α^n, $1 < \dfrac{z}{\alpha^n}\alpha$. Comme $\dfrac{z}{\alpha^n} \in G+$, une contradiction avec la définition de α apparaît.

Calcul de α : Nous avons $\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) = 2x \in \mathbb{N}^*$. ainsi

$$\alpha = n + \sqrt{n^2-1}, \frac{1}{\alpha} = n - \sqrt{n^2-1} \in]0,1[.$$

Comme l'expression $n + \sqrt{n^2-1}$ croît avec n, sa plus petite valeur strictement supérieure à 1 est obtenue avec $n = 3$ on a ainsi $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$ et $G = \{\alpha^p; p \in \mathbb{Z}\}$.

14.2 Indications ou corrigés des exercices, déterminants et systèmes

14.31 Indications ou corrigé 3.1

— On peut tenter de travailler sur les lignes et les colonnes.
Comme toujours, on travaille avec n ni trop grand ni trop petit et pas avec les **...** qui vous conduisent au suicide !

$$|M_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations élémentaires $C_1 \longleftarrow C_k$ pour $k = 2, ..., n$. Cela ne change pas le déterminant et donne :

$$|M_4| = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On effectue alors les opérations élémentaires $L_k \longleftarrow L_1$ pour $k = 2, ..., n$ ce qui fait apparaître un déterminant de matrice triangulaire par blocs et $det(M_n) = (n-1)(-1)^n$.

— **On peut éviter tout calcul** en se ramenant à la recherche des valeurs propres. En effet, la matrice est symétrique réelle, son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres.
Par ailleurs $M_n = U_n - I_n$ où U_n **est la matrice dont tous les termes sont égaux à 1 (et qui doit nous être familière !).**
Alors $MX = \lambda X$ ssi $U_n X = (1+\lambda)X$. Cela nous donne une relation entre les vp de M_n et celles de U_n.
Les valeurs propres de U_n sont n (de multiplicité 1) et 0 (de multiplicité $n-1$) puisque
- U_n est de rang 1, de noyau l'hyperplan d'équation $\sum x_i = 0$;
- comme U_n est diagonalisable $dimKerU_n$ est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0. Il existe donc une autre valeur propre
- $tr(U_n) = n$ la seconde valeur propre de U_n est n.
Retour à M_n : Ses valeurs propres vérifient $1 + \lambda = 0$ ou n. Ce sont donc -1 de multiplicité $n-1$ et $n-1$ de multiplicité 1.

$$det(M_n) = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Elle forment la suite alternée des entiers !

14.32 Indications ou corrigé 3.2

1. Souvenons nous de la définition de la comatrice :

$$[Com(A)]_i^j = (-1)^{i+j} det \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

où la matrice non écrite est la matrice de taille $n-1$ obtenue à partir de A en enlevant ligne i et colonne j. Calculons alors

$$\left[{}^tCom(A)\ A\right]_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} \left[{}^tCom(A)\right]_{i\,k} a_{k\,j} = \sum_{k=1}^{n} [Com(A)]_{k\,i}\, a_{k\,j}$$

$$= (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{k\,j} det \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix}.$$

• si $i = j$, on reconnaît là le déterminant de A
• si $i \neq j$, on reconnaît le développement suivant la colonne i du déterminant d'une matrice dont les colonnes i et j sont identiques...

2. Soit $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX = \lambda X$. On a ${}^tCom(A)\ A\ X = \lambda {}^tCom(A)X = det(A)X$.

   Si A admet n vp distinctes, elle est diagonalisable, ses sev propres sont des droites vectorielles. A admet une base de vecteurs propres $(X_1, ..., X_n)$
   • Supposons que $det(A) \neq 0$. X_i est donc vecteur propre de ${}^tCom(A)X_i$ associé à $\dfrac{det(A)}{\lambda_i} = \prod_{j \neq i} \lambda_j$.
   $(X_1, ..., X_n)$ est donc aussi une base de vecteurs propres de ${}^tCom(A)$ qui est également diagonalisable.
   • Si $det(A) = 0$, A est de rang $n-1$. Considérons une base formée de vp $(X_1, ..., X_n)$ où $X_1 \in Ker(A)$. Pour $i \neq 1$, ${}^tCom(A)X_i = 0$. ${}^tCom(A)$ est donc de rang 1 au plus.

14.33 Indications ou corrigé 3.3.
Écrire avec soin la matrice générique en précisant ligne n et colonne n :

$$M_n = \begin{bmatrix} 1\,! & 2\,! & 3\,! & \dots & n\,! \\ 2\,! & 3\,! & 4\,! & \dots & (n+1)\,! \\ 3\,! & 4\,! & 5\,! & \dots & (n+2)\,! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\,! & (n+1)\,! & (n+2)\,! & \dots & (2n-1)! \end{bmatrix}$$

Méthode 1
— factoriser chaque colonne j par $j!$
— faire $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ en commençant par C_n...
— les termes de la ligne L_i sont multiples de $i-1$ pour $i \geq 3$.
Méthode 2 - plus simple
— Commencer par la dernière ligne

$$L_n \leftarrow L_n - nL_{n-1};$$

—

□

14.34 Indications ou corrigé 3.4.

1. $n-$linéarité, polynôme du premier degré ;
2. valeurs en 2 points

□

14.35 Indications ou corrigé *exercice 3.5.*

1. *On écrit* $\Delta_n(X) = det(M_{[n]} - X) = \begin{vmatrix} a_1 - X & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -X & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & -X & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & -X \end{vmatrix}$

   On a, en développant par rapport à la dernière ligne, puis avec une récurrence facile :

$$\Delta_{n+1}(X) = -X\Delta_n(X) + (-1)^n a_{n+1},$$

$$\Delta_n(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{i=1}^{n} a_i X^{n-i} \right).$$

   $\Delta_n(0)$ *et la limite en* $+\infty$ *sont de signes contraires, le polynôme admet donc une racine strictement positive, puisque* $a_n > 0$.
2. *Montrons que le polynôme* $X^n - \sum_{i=1}^{n} a_i X^{n-i}$, *est de signe constant sur* $[1+\lambda, \infty]$, *lorsque* $\lambda = \mathrm{Max}(a_i)$. *On a,*

$$P(x) = x^n \left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x^i} \right].$$

   Et, si $x > 1 + \lambda$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x^i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1+\lambda)^i} < \frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+\lambda)^{i-1}} < 1.$$

3. *Faisons quelques calculs simples pour conjecturer : commençons par les puissances de* $M_{[4]}$:

$$\begin{bmatrix} a1^2 + a2 & a1 & 1 \\ a2\ a1 + a3 & a2 & 0 \\ a3\ a1 & a3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a1^3 + 2\,a2\ a1 + a3 & a1^2 + a2 & a1 \\ a2\ a1^2 + a3\ a1 + a2^2 & a2\ a1 + a3 & a2 \\ a3\ a1^2 + a3\ a2 & a3\ a1 & a3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a1^4 + 3\,a2\ a1^2 + 2\,a3\ a1 + a2^2 & a1^3 + 2\,a2\ a1 + a3 & a1^2 + a2 \\ a2\ a1^3 + a3\ a1^2 + 2\,a2^2 a1 + 2\,a3\ a2 & a2\ a1^2 + a3\ a1 + a2^2 & a2\ a1 + a3 \\ a3\ a1^3 + 2\,a3\ a2\ a1 + a3^2 & a3\ a1^2 + a3\ a2 & a3\ a1 \end{bmatrix}$$

   On observe ensuite que
   — *la multiplication d'une matrice m quelconque par N, à droite, a pour effet de décaler les colonnes vers la droite,*
   — *la multiplication d'une matrice m quelconque par N, à gauche, a pour effet de décaler les lignes vers le haut,*
   — *élever* $A_{[n]}$ *à la puissance p a pour effet de multiplier cette matrice par* a_1^{p-1}.
   Par ailleurs,

$$M_{[n]}^p = (A+N)^p = \sum A^{\alpha_1} N^{\beta_1} \dots A^{\alpha_p} N^{\beta_p} \tag{14.12}$$

   où la somme est étendue à l'ensemble des 2^p *produits tels que*

$$\alpha_i = 1 - \beta_i = 0 \text{ ou } 1.$$

   Prouvons que, si $p = 2n-2$, *le terme d'indices* (i,j) *de* $M_{[n]}^p$, *est strictement positif :*

— *A^k a $a_1^k a_n$ pour coefficient d'indices $(n,1)$*
— *$A^k N^{j-1}$ a $a_1^k a_n$ pour coefficient d'indices (n,j)*
— *$N^{n-i}A^kN^{j-1}$ a $a_1^k a_n$ pour coefficient d'indices (i,j)*
Dés lors que la somme (14.12) contient un terme $N^{n-i}A^kN^{j-1}$ avec $k \geq 1$ pour tout couple (i,j), la matrice M^p a tous ses coefficients strictement positifs. Cela suppose que $p > n-i+j-1$.
Comme $\sup(n-i+j-1) \geq 2n-2$, le résultat est établi pour $p \geq 2n-1$.
On peut faire mieux. Si on observe que la ligne 1 peut être rendue positive avec des termes A^kN^{n-1}, il suffit de prendre $i \geq 2$, $p \geq 2n-2$, pour rendre positives les autres lignes.

□

14.36 Indications ou corrigé 3.6.

1. Récurrence facile (développer par rapport col1, coln)
2. Multiplier par une matrice bien choisie diag par blocs) pour obtenir ce que l'on souhaite.
3. On le prouve pour
$$A = \begin{bmatrix} b & y \\ x & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ x_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 & y_2 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \ldots$$

□

14.37 Indication ou corrigé *3.10*

Classique : on recherche une relation de récurrence, comme le terme $n + 1/n$ varie avec n, taille de la matrice, on préférera noter

$$\Delta'_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Avec notre prudence habituelle, nous détaillons le développement pour $n = 3, 4\ldots$ avant de généraliser.
J'insiste là dessus !

$$\Delta'_4(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{?}{=} a\Delta'_3(a) - \Delta'_2(a).$$

Nous développons ensuite par rapport à la première colonne :

$$\Delta'_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}_{(n)} = a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}_{(n-1)} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

On reconnaît là
$$\Delta'_n(a) = a\Delta'_{n-1}(a) - \Delta'_{n-2}(a), \tag{14.13}$$
en développant le deuxième déterminant par rapport à sa première ligne.

Nous allons maintenant traiter comme il se doit cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : Son équation caractéristique est $X^2 - aX + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4$, non nul lorsque $a = n + 1/n$, si $n > 1$.

— les solutions de (14.13) sont les suites de la forme :

$$u_n = \lambda \left(\frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n;$$

— $\Delta'_2(a) = a^2 - 1,\ \Delta'_3(a) = a^3 - 2a$;

Poser $\Delta'_0(a) = 1$ et $\Delta'_1(a) = a$ est compatible avec la relation de récurrence. On en déduit

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda \left(\frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}\right) + \mu \left(\frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}\right) & = a \end{cases}$$

Cela donne :

$$\lambda = -1/2\, \frac{-\sqrt{a^2-4} + a}{\sqrt{a^2-4}} = \frac{-1}{n^2-1},\ \ \mu = 1/2\, \frac{a + \sqrt{a^2-4}}{\sqrt{a^2-4}} = \frac{n^2}{n^2-1};$$

— on fait $a = n + 1/n$, dans l'expression obtenue pour $\Delta'_n(a)$.

14.38 Indication ou corrigé *3.11*

1.
2.
3.

14.39 Indication ou corrigé *3.12*

1. Calcul...
2. On établit les relations de récurrence :

$$\Delta_{n+2}(X) = -X\Delta_{n+1}(X) + a_{n+1}b_{n+1}\Delta_{2p}(X)$$

$$\Delta_{2p+2}(X) = F_{p+1}(X^2) = X^2 G_p(X^2) + a_{2p+1}b_{2p+1}F_p(X^2)$$

$$\Delta_{2p+3}(X) = -XG_{p+1}(X^2) = -X(F_{p+1}(X^2) + a_{2p+2}b_{2p+2}G_p(X^2)$$

qui permettent de conclure à l'existence des deux polynômes qui sont de degrés p, à coefficients strictement positifs.

Un polynôme $P(X^2)$ où $P(Y)$ a des coefficients strictement positifs admet P(0) pour minimum et n'a pas de racine réelle, ses racines sont complexes et conjuguées deux à deux. Elles sont également opposées deux à deux (parité).

3. Le poly caractéristique des deux matrices M_3 et $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a_2b_2} & 0 \\ -\sqrt{a_2b_2} & 0 & \sqrt{a_1b_1} \\ 0 & -\sqrt{a_1b_1} & 0 \end{pmatrix}$ est le même et ne dépend que des produits a_ib_i, on compare le pc à celui de la matrice antisymétrique tridiagonale de termes $\pm\sqrt{a_ib_i}$.
4. On vérifie que les valeurs propres sont imaginaires pures.
5. On montre que M a les mêmes vp qu'une matrice antisymétrique.

14.40 Indications ou corrigé 3.13

1. Soit c_n ce nombre de multiplications, on vérifie sans peine que $c_{n+1} = (n+1)c_n$ et que $c_2 = 2$. Ce qui donne $c_n = n!$.
2. On sait que pour inverser une matrice A on écrit côte à côte les matrices A et I_n. La méthode de Gauss consiste par les opérations $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $L_i \leftarrow L_i \alpha L_j$, $(i \neq j, \alpha \neq 0)$, à transformer A en une matrice triangulaire, dans un premier temps. Si cette matrice échelonnée a des termes tous non nuls sur la diagonale, elle est inversible. Son déterminant est alors le produit des termes diagonaux. Il permet de retrouver celui de A puisque les opérations $L_i \leftarrow \alpha L_i$, et $L_i \leftrightarrow L_j$ ont respectivement multiplie le déterminant par α et par -1.

   Retrouver le déterminant de A demande donc au plus $2(n-1)$ multiplications (dét de la matrice échelonnée, puis reconstitution). Mais auparavant il aura fallu obtenir la matrice échelonnée, ce qui coûte $(n-1)^2$ multiplications pour placer des zéros dans la première colonne sous la diagonale, $(n-2)^2$ multiplications pour placer des zéros dans la deuxième colonne sous la diagonale, ... , 1 multiplication pour placer 0 dans la colonne $n-1$ sur la dernière ligne.

   Bilan : Au plus
   $$2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sim \frac{n^3}{3}$$
   multiplications. C'est mieux que n !

Méthode de Gauss : description

Nous décrivons la méthode de Gauss pour la résolution d'un système de n équations à p inconnues $Mx = b$, dans lequel :
$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ x \in \mathbb{K}^p,\ b \in \mathbb{K}^n.$$
Les méthodes de calcul de déterminant, d'inversion s'en déduisent facilement.

Pour résoudre le système linéaire $Mx = b$, ci-dessus par la méthode de Gauss, on commence par "compléter" la matrice M en lui ajoutant la colonne b, on obtient ainsi une nouvelle matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$. On procède de la façon décrite par l'algorithme ci-dessous pour obtenir une matrice en échelons comportant des 0 ou des 1 sur la diagonale. La discussion et la résolution du système obtenu sont alors immédiates. [12] :

pour chaque indice j variant de 1 à p, faire :

— calculer l'indice p_j ($j^{ième}$ **pivot**) de la ligne d'indice supérieur ou égal à j tel que
$$|a_{p_j,j}| = \sup_{i \geq j} |a_{i,j}|.$$

— **si** $|a_{p_j,j}| > 0$ **alors, faire :**
  — $L_{p_j} \leftrightarrow L_j$;
  — $L_j \leftarrow -\dfrac{1}{a_{j,j}} L_j$;
  — **pour chaque indice i variant de $j+1$ à n, faire :**
  $$L_i \leftarrow L_i - a_{i,j} L_j;$$
  fin faire
  fin si

fin faire

pour chaque indice j variant de p à 2, faire :

12. **Attention :** chaque opération décrite affecte la matrice A

pour chaque indice i variant de $j-1$ à 1, faire :

$$L_i \leftarrow L_i - a_{i,j} L_j;$$

fin faire

fin faire

14.41 Indication ou corrigé 3.14

1. • si A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$. On a donc $\det(A) = \pm 1$.

   • Réciproquement si $\det(A) = \pm 1$, A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$, A^{-1} est bien élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
2. Le polynôme $P(x) = \det(A + xB)$ prend les valeurs 1 ou -1 en 2n+1 points 0, 1, ..., 2n. Par le principe des tiroirs il prend une de ces deux valeurs n+1 fois au moins. Comme $P(x) - a$ est de degré au plus n, il est nul pour $a = 1$ ou $a = -1$ et P est constant.

   Alors $\det(A+xB) = \det(A)$. Pour $x \neq 0, x^n \det\left(\dfrac{1}{x}A + B\right) = \det(A) = P(0) = \pm 1$. Il vient alors
   $$\lim_{x\to+\infty} x^n \det\left(\frac{1}{x}A + B\right) = \det(A) = \pm 1.$$
   Cela impose $\det(B) = 0$ car $\lim \det\left(\dfrac{1}{x}A + B\right) = \det(B)$.

14.3 Indications ou corrigés des exercices, réduction et polynômes d'endomorphismes

14.42 *Corrigés de l'exercice 4.2*
Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable.
Nous l'écrivons $A = U + \text{diag}(0, 1, ..., n-1)$, soit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Si λ est une vp associée au vecteur propre X, la relation $AX = \lambda X$ donne pour $i = 1, 2, ..., n$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j + (i-1)x_i = \lambda x_i$$

ou encore, en notant $T = \sum_{j=1}^{n} x_j$, $\boxed{(\lambda - i + 1)x_i = T.}$
λ ne saurait être égal à aucun des $i-1$ puisqu'alors on aurait $T = 0$ et $x_j = 0$ pour $j \neq i$, puis $x_i = 0$ et enfin $X = 0$ ce qui est exclu pour un vecteur propre.

On a donc $X = T \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda - 1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda - n + 1} \end{bmatrix}$. Le sev propre associé à λ est donc une droite. Comme A est diagonalisable il y a n sev propres et n valeurs propres distinctes. On a alors,

$$T = \sum_{j=1}^{n} x_j = T \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k}$$

et comme $T \neq 0$, cela donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1.$$

Ainsi les n vp distinctes vérifient cette équation.

$\Leftarrow$ **Réciproquement,** si μ vérifie $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mu - k} = 1$, c'est une solution de l'équation polynomiale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=0, j\neq k}^{n-1} (\mu - k) \right) - \prod_{k=0}^{n-1} (\mu - k) = 0,$$

qui est de degré n exactement. Elle admet a priori au plus n racines distinctes.
Or nous avons montré qu'elle admettait comme solution les vp de A. Elle n'en admet pas d'autre et μ est une des vp de A.

14.43 Indications ou corrigé 4.4
On sait que si f et g commutent les sev propres de f sont stables par g. On note V_i le sev propre de f associé à sa valeur propre λ_i. On a $\oplus V_i = E$ et chaque V_i est stable par g. Notons g_i la restriction de g à V_i, c'est un endomorphisme de V_i qui est lui aussi diagonalisable (un polynôme

annulateur à racines simples de g annule également g_i).
Il existe donc pour chaque V_i une base formée de vecteurs propres de g_i donc de g. La réunion de telles bases des g_i est une base de E. Cette base est formée de vecteurs propres de f (tout élément de V_i est vp de f) et de g.

14.44 *Corrigés des exercices 4.5*

1. (a) On suppose que $u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,E)$, et que $\begin{cases} u \circ v \circ u & = u \\ v \circ u \circ v & = v \end{cases}$,

   • $Keru \cap Imv = \{0\}$: si $x \in Keru \cap Imv$, il existe $y \in F, x = v(y)$ on aura $v \circ u \circ v(y) = v(y) = x$ et $v \circ u \circ v(y) = v \circ u(x) = 0$. Donc $x = 0$ et les deux sev sont en somme directe.

   • $Keru \oplus Imv = E$: on raisonne par analyse synthèse comme il se doit, on suppose que $x = x_1 + x_2 = x_1 + v(y)$ avec $x_1 \in Keru$.
   Alors, $u(x) = 0 + u \circ v(y)$ et $v \circ u(x) = v \circ u \circ v(y) = v(y) = x_2$.
   Ainsi, $x = (x - v \circ u(x)) + v \circ u(x)$.
   La synthèse est immédiate : on a bien $v \circ u(x) \in Imv$ et $(x - v \circ u(x)) \in Keru$ puisque $u \circ v \circ u = u$.

   (b) Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, E_1 et F_1 deux sev de E et de F tels que $Keru \oplus E_1 = E$ et $Imu \oplus F_1 = F$.
   Unicité : supposons que $Imv = Imv_1 = E_1$ que $Kerv = Kerv_1 = E_1$ et que $u \circ v \circ u = u \circ v_1 \circ u = u$
   Considérons $y = u(x) + y_1 \in Imu \oplus F_1$. Comme $u \circ (v - v_1) \circ u = 0$, il vient :
   $u \circ (v - v_1) \circ u(x) = 0$ d'où $u \circ (v - v_1)(u(x)) = u \circ (v - v_1)(u(x) + y_1) = u \circ (v - v_1)(y) = 0$.
   Comme $(v - v_1)(y) \in Im(v - v_1) \subset E_1$, cela impose $(v - v_1)(y) \in E_1 \cap Keru = \{0\}$. On a bien $v - v_1 = 0$.

   Existence : on sait par un lemme fondamental qui conduit au théorème du rang que E_1 etImu sont isomorphes par $u_1 = u_{|E_1}$. Notons $v_1 : Imu \to E_1$ l'isomorphisme réciproque de u_1 et construisons

   $$v : y_1 + y_2 \in Imu \oplus F_1 = F \to v_1(y_1) = x \in E_1.$$

   Nous avons pour tout $y \in F$, $v \circ u \circ v(y) = v \circ u(v_1(y_1)) = v(y_1) = v(y)$.
   Par ailleurs, pour $x = x_1 + x_2 \in Keru \oplus E_1$, $u \circ v \circ u(x) = u \circ v(u(x_2)) = u(x_2) = u(x)$.
   On vérifie sans peine que $Kerv = F_1$ et $Imv = E_1$

2. • **Analyse** : Soit A une matrice carrée commutant avec toute matrice de $O_3(\mathbb{R})$.
   L'endomorphisme u canoniquement associé à A commute avec v associé à $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $Ker(v - id) = vect(e_1)$ est stable par u donc $u(e_1) = \alpha e_1$. On montre de la même façon que les droites $vect(e_2), vect(e_3)$ sont aussi stables par u et ainsi : $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$ u commute également avec la symétrie orthogonale s par rapport au plan $x + y + z = 0$ et laisse donc stable la droite $Ker(s + id) = vect(e_1 + e_2 + e_3)$. Cela donne :
   $u(e_1 + e_2 + e_3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \delta(e_1 + e_2 + e_3)$.
   On a donc $\gamma = \beta = \alpha$ et u est une homothétie et $A = \alpha I_3$ une matrice scalaire.

• La synthèse est immédiate : toute matrice scalaire commute avec les matrices orthogonales (et avec toute matrice).

14.45 Corrigé de l'exercice 4.6

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que (1) $P^{-1}AP = B$. avec $P = R + iQ$.

1. Avec $P = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1u & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, P est inversibles alors que sa partie réelle et sa partie imaginaire ne le sont pas.
2. Si P est inversible, $P^{-1}AP = B \Leftrightarrow AP = PB \Leftrightarrow (A\,(R + iQ) = (R + iQ)\,B) \Leftrightarrow (AR = RB$ et $AQ = QB)$.
3. • On peut montrer qu'un déterminant $det(P + xQ)$ est une fonction polynomiale en x par récurrence sur le nombre de lignes, en initialisant avec $n = 2$ puis en justifiant l'hérédité en développant par rapport à une colonne.
   • On peut aussi invoquer la formule
   $$det(M) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$$
   qui devient ici une somme de polynômes de degrés égaux à n :
   $$det(P + XQ) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} [p_{i,\sigma(i)} + xq_{i,\sigma(i)}],$$
4. On observe que les relations $AR = RB$ et $AQ = QB$ entraînent $A\,(R + xQ) = (R + xQ)\,B$. Comme le polynôme en x $F(x) = det(R + xQ)$ n'est pas nul ($F(i) \neq 0$), il admet au plus n racines et il existe un réel x pour lequel $M = P + xQ$ est inversible et alors $A\,M = M\,B$ ou $M^{-1}\,A\,M = B$./ fin.

14.46 Indication ou corrigé *4.7*

1.
2.

14.47 Indication ou corrigé *4.8*

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & a & c \\ b & -x & c \\ b & -a & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & a & c \\ b + x & -x - a & 0 \\ 0 & x - a & -x - c \end{vmatrix} = x\left(-x^2 - ca + ba + bc\right)$.
   — si $-ca + ba + bc > 0$, A admet 3 valeurs propres distinctes et est diagonalisable ;
   — si $-ca + ba + bc = 0$, A est trigonalisable (nilpotente puisque $\chi_A(x) = -x^3$) mais n'est pas diagonalisable ;
   — si $-ca + ba + bc < 0$, A n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$,
   — si $-ca + ba + bc \neq 0$, A admet 3 valeurs propres distinctes et est diagonalisable ;
   — si $-ca + ba + bc = 0$, A est trigonalisable (nilpotente puisque $\chi_A(x) = -x^3$) mais n'est pas diagonalisable ;
   (c) Il suffisait d'observer que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et que les colonnes de A sont proportionnelles à ces vecteurs.

2. **Endomorphismes de rang 1**

(a) On pensera à $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ qui vérifient $N^2 = 0 \neq N$ et $M^2 = 2M \neq M$... (toutefois αM est un projecteur lorsque $\alpha = 1/2$...)

(b) Considérons donc f de rang 1 et de trace égale à 1. Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$, une base de Ker(f) complétée en $(e_1, ..., e_{n-1}, , e_n)$, base de E. La matrice de f dans cette base est $Mat(f, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Comme sa trace est égale à 1, $\lambda = 1$. On calcule alors son carré par blocs :
$M^2 = \begin{bmatrix} O_{n-1} & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n-1} & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n-1} & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M$. f est donc une de projection.

(c) Plus généralement, $Mat(f, B) = \begin{bmatrix} O_{n-1} & X \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Si λ est nul, f est nilpotente d'ordre 2, sinon, il vient : $M^2 = \begin{bmatrix} O_{n-1} & X \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n-1} & X \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n-1} & \lambda X \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} = \lambda M$. Ainsi, $\dfrac{1}{\lambda} f$ est un projecteur.

(d) Base de$\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs : on note $(E_{i,j})_{i,j}$ les matrices de la base canonique. D'après ce qui précède, les $E_{i,i}$ les $F_{i,j} = E_{i,i} + E_{j,i}$ pour $j \neq i$ sont des matrices de projection. Il y en a $n^2 = n + 2n(n-1)/2$, et, pour toute matrice M on a :

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i \neq j} m_{i,j} (F_{i,j} - E_{i,i})...$$

14.48 Indications ou corrigé exercice 4.9

1. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$; f est donc trigonalisable. Par contre :

$$\text{Ker}(f-2) = \text{vect}({}^t[1,1,1]), \ \text{Ker}(f-4) = \text{vect}({}^t[1,-1,1])$$

et f n'est pas diagonalisable.
Le lemme des noyaux associé au théorème de Cayley Hamilton, permet de déterminer deux sev supplémentaires stables par f. En effet, $\chi_A(X) = (X-2)\,(X-4)^2$ et

$$\text{Ker}(f-2) \oplus \text{Ker}((f-4)^2) = E.$$

Dans une base adaptée, la matrice de f est diagonale par blocs : $\begin{bmatrix} * & \\ & B \end{bmatrix}$. Si on choisit une base (u, v, w) telle que $u \in \text{Ker}(f-2)$, $v \in \text{Ker}(f-4)$ et $w \in \text{Ker}((f-4)^2)$, la matrice de f sera

$$B = M(f, (u, v, w)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & * \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. On raisonne par analyse synthèse :
Analyse :

— Si un endomorphisme g commute avec f, les noyaux de $f - \lambda$ et de $(f - \lambda)^2$ sont stables par g.

— En particulier $\mathrm{Ker}(f-2), \mathrm{Ker}(f-4)$, et $\mathrm{Ker}((f-4)^2)$ sont stables par g.

— Dans une base (u, v, w) comme ci-dessus, la matrice de g est donc de la forme : $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$.

Synthèse : on recherche alors les matrices M qui commutent avec B. Comme M commute avec $B = P^{-1}AP$ ssi PMP^{-1} commute avec A, le tour est joué.

3. Calculs explicites de B des matrices M qui commutent avec B et des matrices qui commutent avec A.
[13]

13. ceci est un pdf

```
> restart;  with(linalg): with(student):
> A:=matrix([[8,-1,-5],[-2,3,1],[4,-1,-1]]):
> EP:=eigenvects(A);
  factor(charpoly(A,X));
  u:=op(EP[1][3]);
  v:=op(EP[2][3]);
```

$$EP := [2, 1, \{[1, 1, 1]\}], [4, 2, \{[1, -1, 1]\}]$$

$$(X-2)(X-4)^2$$

$$u := [1, 1, 1]$$

$$v := [1, -1, 1]$$

```
> kernel((A-4)^2);
  w:=op(2,%);
  P:=augment(u,v,w);
  B:=evalm(P^(-1)&*A&*P);
```

$$\{[1, 1, 0], [2, 0, 1]\}$$

$$w := [2, 0, 1]$$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> M:=matrix(3,3,[[a,0,0],[0,b,c],[0,0,d]]);
  equate(M&*B,B&*M);
  solve(%);
  Mb:=subs(%,evalm(M));
```

$$M := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$\{0 = 0, 2a = 2a, 4b = 4b, 4d = 4d, 3b + 4c = 4c + 3d\}$$

$$\{a = a, b = d, c = c, d = d\}$$

$$Mb := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

```
> evalm(P&*Mb&*P^(-1));
  evalm(A&*%-%&*A);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{a}{2} + \frac{3d}{2} + c & \frac{a}{2} - \frac{d}{2} & a - d - c \\ -\frac{a}{2} + \frac{d}{2} - c & \frac{a}{2} + \frac{d}{2} & a - d + c \\ -\frac{a}{2} + \frac{d}{2} + c & \frac{a}{2} - \frac{d}{2} & a - c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```

□

14.49 Indications ou corrigé *ex. 4.10.*

1. Une combinaison linéaire des u^k est un polynôme
$$P(u) = \sum \alpha_i u^i.$$
Dans une base de diagonalisation, si A est la matrice de u, il apparaît que
$$P(A) = diag(P(\lambda_i)).$$
Cette matrice est nulle ssi les λ_i sont racines de P qui est donc nul si son degré est $\leq n-1$ et les vp distinctes.
Cela prouve que
$$(id_E, u, u^2, ..., u^{n-1})$$
est libre.
Est-ce une base ?
Si v commute avec u, les noyaux sont stables. Donc les sev propres qui sont des droites sont stables par v. Dans une base de diagonalisation de u, la matrice de v est diagonale : $diag(\mu_i)$. Il existe un polynôme de degré au plus $n-1$ tel que
$$\forall i, P(\lambda_i) = \mu_i.$$
2. Diagonaliser (si l'énoncé le justifie) et considérer le polynôme $P(X) = (X-\lambda)(X-\mu)$.
3. Un endomorphisme qui commute avec u laisse les $ker(u-\lambda_i)$ stables. Dans une base de diagonalisation de u, sa matrice est formée des blocs $\lambda_i I_{\nu_i}$, celle de v est diagonale par blocs. Les blocs B_i sont quelconques (ils commutent avec les matrices scalaires).
Bilan : v commute avec u ssi $v = \oplus v_i$, chaque v_i est endomorphisme de $Ker(u-\lambda_i)$. La dimension de F_u est donc $\sum_i \nu_i^2$.

□

14.50 Indications ou corrigé *ex. 4.11.*

Feuille de calculs : *CENReducRev1.mws.*

1. La matrice n'est pas diagonalisable, **eigenvects(A) ;** retourne :
$$[4, 3, \{[-2, -5, 2, 1]\}], [-4, 1, \{[1, -3/2, -1, -5/2]\}].$$
L'endomorphisme n'est pas diagonalisable. Toutefois, le lemme de noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton permettent d'établir que
$$ker(A+4) \oplus ker(A-4)^3 = E.$$
Dans une base adaptée, la matrice est diagonale par blocs. Pour obtenir une matrice triangulaire outre la méthode indiquée dans la question 2, on peut rechercher une base adaptée au **drapeau**
$$ker(A-4) \subset ker(A-4)^2 \subset ker(A-4)^3...$$
2. Une autre méthode à connaître également, voir feuille de calculs MAPLE.

□

14.51 Indications ou corrigé ex. 4.12

comme il s'agit d'un oral avec MAPLE, on pouvait conjecturer mais attention à ne pas perdre de temps.

1. Observer tout d'abord que le rang est au plus égal à 2. Trois cas se présentent :
   — Tous les a_i sont nuls, on oublie...
   — Seul a_{p+1} est non nul : $rg(M) = 1$ et $dimKer(M) = 2p$. Le noyau est l'hyperplan $x_{p+1} = 0$. Il faut savoir en expliciter une base : $(e_1, .., e_p, e_{p+2}, ...e_{2p+1})$
   — Il existe un indice $i_0 \neq p+1$ tel que $a_{i_0} \neq 0$. Alors $rg(M) = 2$ et $dimKer(M) = 2p-1$. Le système d'équations est
   $$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{p+1} & = & 0 \\ \sum a_j x_j & = & 0 \end{array} \right.$$
   d'où $kerM = vect(a_i e_{i_0} - a_{i_0} e_i; i \neq i_0, i \neq p+1)$.
2. 0 est vp d'ordre $2p-1$ au moins. Un calcul avec la formule
   $$[M^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} M_{k,j}$$
   conduit aux résultats :
   $$\left\{ \begin{array}{ll} [M^2]_{i,j} = \sum a_i^2, & \text{si } i = j = p+1 \\ [M^2]_{i,j} = a_i a_j, & \text{sinon} \end{array} \right.$$
   On sait que la trace de cette matrice donne la somme des carrés des valeurs propres. IMPORTANT.
   Ainsi,
   $$Tr(M^2) = \sum \lambda_i^2 = a_{p+1}^2 + 2 \sum_{i \neq p+1} a_i^2.$$
   D'autre part
   $$\sigma_2 = 1/2(\sigma_1^2 - \sum \lambda_i^2) = - \sum_{i \neq p+1} a_i^2.$$
   $$det(M - X) = -X^{2p+1} + a_{p+1} X^{2p} + \sum_{i \neq p+1} a_i^2 X^{2p-1}.$$
3. — cas où a_{p+1} est seul non nul : c'est clair ;
   — cas où il existe $i_0 \neq p+1$ tel que $a_{i_0} \neq 0$: une CNS, un polynôme scindé à racines SIMPLES annule M. Est-ce le cas ? On sait que
   $$Q(M) = 0 \Rightarrow Q(\lambda_i) = 0.$$
   Q divise donc $X(X^2 - a_{p+1} X - \sum_{i \neq p+1} a_i^2)$.

□

14.52 Indications ou corrigé *exercice 4.13*
Observer que c'est un polynôme en une matrice simple que l'on diagonalisera.

Plus précisémment : avec $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, on observe que

— $K^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J + I_3$;

— $A = \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & b+a & c \\ b & c & a \end{bmatrix} = a\,I_3 + c\,K + b\,J = (a-b)\,I_3 + c\,K + b\,K^2$;

— Après avoir diagonalisé K on a une diagonalisation de $F(K)$ où $F(X) = bX^2 + cX + (a-b)$ puisque $P^{-1}F(K)P = F(P^{-1}KP)$.

Une matrice de passage : $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

Une diagonalisation de A : $A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a+\sqrt{2}c+b & 0 & 0 \\ 0 & a-\sqrt{2}c+b & 0 \\ 0 & 0 & -b+a \end{bmatrix}$.

□

14.53 Indications ou corrigé ex *4.14*

Le polynôme caractéristique est : $P(X) = -X^3 + 3\,zX + z + z^2 - 3$ et $P'(X) = X^2 + 3\,z$.
Dans la plupart des cas il admet des racines simples. En effet, $P(X)$ admet une racine multiple ssi il existe x tel que

$$\begin{cases} P(x) = -x^3 + 3\,zx + z + z^2 \ = 0 \\ P'(x) = -3x^2 + 3\,z = 0 \end{cases}$$

Il admet une racine multiple ssi $z = 0$ ou 1.
• Pour $z \neq 0, 1$ le pc admet des racines simples et A est diagonalisable ;
• Pour $z = 0, 1$ étudions les deux matrices correspondantes :

-$z = 0$: $A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente, non diagonalisable ;

- $z = 1$: $A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable (symétrique réelle...) ;

Dans les autres cas $A(z)$ est diagonalisabe

□

14.54 Indication ou corrigé *4.15*

Comme le précédent : le polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = -(x^3 - x^2 + z)$. Il admet x comme racine double ssi $x^3 - x^2 + z = 0$ et $3x^2 - 2x = 0$. Les seules racines doubles possibles sont $x = 0$ obtenue avec $z = 0$ et $x = 2/3$ obtenue avec $z = 4/27$. On étudie donc les deux matrices particulières :
Dans tous les autres cas les valeurs propres sont distinctes et A_z est diagonalisable.

14.55 Indications ou corrigé *4.16*

• Le rang est égal à 3 si $a \neq 0$, à 2 si $a = 0$;
• La matrice est triangulaire, ses valeurs propres sont 1, 2 et a, elle est diagonalisable si les vp sont distinctes, donc si $a \neq 1$ et $a \neq 2$. Étudions les deux cas qui restent :

si $a = 1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A - I_3$ est visiblement de rang 2, son noyau est une droite, A n'est donc pas diagonalisable.

si $a = 2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A - 2I_3$ est de rang 1, A est diagonalisable (en effet le sev propre associé à 2 est de dim 2, le sev propre associé à 1 est de dim 1, la somme des dimensions est égale à 3, voir remarque rapport CCP 2007). □

14.56 Indications ou corrigé ex *4.17*

1. D'après le théorème de Cayley Hamilton, $\chi_f(f) = f^2 - tr(f)f + det(f)id_E = 0$. Ainsi
$$f^2 = tr(f)f - det(f)id_E = a_2 f + b_2 id_E;$$
Une récurrence immédiate (que l'on saura faire au tableau) donne :
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_2 a_n, & \text{si } n \geq 2, \\ b_{n+1} = b_2 a_n + b_n, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_n = (a_2)^{n-1}, & \text{si } n \geq 2, \\ b_{n+1} = b_2(1 + a_2 + ... + a_2^{n-2}), & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$
2. Les sev propres de f sont $Ker(f+2), Ker(f-1)$; si f n'est pas diagonalisable, la somme de leurs dimensions n'est pas égale à 3 mais à 2 et ce sont deux droites vectorielles.
Deux cas se présentent :
— Soit $\chi_f(X) = -(X-1)(X+2)^2$ et le lemme des noyaux et le théorème de Cayley Hamilton nous permettent d'écrire que :
$$Ker(\chi_f(f)) = Ker((f - id) \oplus Ker((f + 2id_E)^2) = \mathbb{R}^3.$$
Dans une base adaptée à cette décomposition, (u, v, w) telle que $u \in Ker((f - id)$, $v \in Ker((f + 2id)$,
$$mat(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$
où $a \neq 0$ puisque f n'est pas diagonalisable, $b = -2$ puisque la diagonale dune matrice triangulaire contient la liste de ses valeurs propres. On cherche alors $B' = (u, v, w')$ telle que $mat(f, B') = A_2$, soit $w' = \alpha v + \beta w$ tq $f(w') = v - 2w'$. C'est un calcul immédiat qui donne $\beta = 1/a$.
— Soit $\chi_f(X) = -(X-1)^2(X-2)$ et de façon identique, il existe une base tq $mat(f, B) = A_1$...
Dans les deux cas $A_i = D_i + N_i$ où D_i et N_i commutent.

□

14.57 Indication ou corrigé *4.18*

1. Valeurs propres : comme $f^2 = -id$, les vp de f sont solutions de $X^2 = -1$; ce sont donc $\pm i$ avec un multiplicité égale pour i et $-i$, puisque ce sont des endomorphismes réels. On a donc $\chi_f(X) = (X^2 + 1)^{n/2}$, et n est pair. Idem pour g.
2. Que dire des vecteurs propres de M et N associées à f et g à part qu'il n'y en a pas dans $\mathbb{R}^n$? Raisonnons par analyse synthèse :
— M et N annulent un polynôme scindé à racines simples : X^2+1. Elles sont diagonalisables (voir thm **??**).

— Considérons $U \in \mathbb{C}^n$ tel que $MU = iU$.
On a aussi, $MNU = -NMU = -iNU$; en conséquence, $N(Ker(M-i)) \subset Ker(M+i)$;
— si P est la matrice de passage vers une base de vp de M, telle que

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} iI_{n/2} & O_{n/2} \\ O_{n/2} & -iI_{n/2} \end{bmatrix},$$

la matrice $P^{-1}NP$ est, quant à elle, de la forme $\begin{bmatrix} O_{n/2} & A \\ B & O_{n/2} \end{bmatrix}$;
— plus précisément, de $N^2 = -I_n$, on déduit : $AB = BA = -I_{n/2}$ d'où $B = -A^{-1}$.
Synthèse : considérons les matrices

$$M' = \begin{bmatrix} iI_{n/2} & O_{n/2} \\ O_{n/2} & -iI_{n/2} \end{bmatrix}, \; N' = \begin{bmatrix} O_{n/2} & A \\ -A^{-1} & O_{n/2} \end{bmatrix},$$

elles vérifient bien $M'2 = N'^2 = -I_n, \; M'N' + N'M' = 0_n$. Nous avons fait le tour de la question.

14.58 Indication ou corrigé *4.19*

1. B diagonalisable ;
2. • la question précédente ouvre la voie : ${}^tM = M^{-1} + aI_n$ donc $B =^t M\,M = I_n + aM$.
   $M = \dfrac{1}{a}(-I_n)$. C'est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable.
3. • Nous avons vu que M est symétrique. On a donc ${}^tM = M = M^{-1} + aI_n$. De $M = M^{-1} + aI_n$ on déduit en multipliant, $M^2 = I_n + aM$.

14.59 Indication ou corrigé *4.20*

Penser au produit scalaire matriciel $trace({}^tAB) =< A|B >$ et introduire une matrice $P \in O_n(R)$ telle que ${}^tP\,AP = D$...

14.60 Indication ou corrigé *4.21*

Supposons A et B non nuls, sinon c'est immédiat.

1. On discute de l'existence de $X \neq 0$ tel que $DX = A\,{}^tBX - X = 0$. On a nécessairement X colinéaire à A. Ecrivons $B = \alpha A + W$ où $W \perp A$. Il vient

   $$A\,{}^tBX = X \Leftrightarrow \begin{cases} X & = \lambda A \\ \alpha ||A||^2 A & = \lambda A \end{cases}.$$

   La CNS cherchée s'exprime $< B|A > \neq ||A||^2$.
2. Exprimons D^{-1} : on cherchera à résoudre l'équation $DX = Y$. Pour cela posons

   $$X = uB + X_2, \; Y = vB + Y_2, \; A = \alpha B + A_2...$$

   On a alors : $DX = A\,({}^tBX) + X = Y$ soit

   $$\begin{cases} u||B||^2 + = \\ \end{cases}$$

14.61 Indication ou corrigé *4.22*

1. Un calcul de déterminant donne $a^3\left(a^2+a+1\right)(a-1)^3$.
2. Nous avons à étudier 4 cas ($a=0,1,j,j^2$).

   • si $a=0$, on a :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   • si $a=1$, on a :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   et ces deux matrices sont symétriques réelles.

   • si $a=j$, on a :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 & 1 \\ 1 & j^2 & 1 & j \\ 1 & 1 & j & j^2 \end{bmatrix}$$

   • si $a=j^2$, on a :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j^4 & 1 \\ 1 & j^4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & j^4 \end{bmatrix}$$

14.62 Indication ou corrigé *4.23*

1. C'est une matrice symétrique réelle ; elle est donc diagonalisable, ses valeurs propres sont réelles. Comme elle est de rang 2, ses valeurs propres sont $0,0,a,b$,avec α et β non nuls.
2. On pose l'équation

$$P^{-1}AP=D\Leftrightarrow AP=PD.$$

   Ecrivons par blocs :

$$A=\begin{pmatrix} U & U \\ U & U \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & d \end{pmatrix} \text{avec}\, d=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

   Comme U est inversible, on obtient en développant et identifiant,

$$Z=-X,\ T=Y,\ 2UY=Yd.$$

   Les colonnes de Y sont alors des solutions non nulles des systèmes $(2U-\alpha)C_1=0$, $(2U-\beta)C_2=0$;

   Une matrice P est solution du problème ssi elle est inversible et de la forme $P=\begin{pmatrix} X & Y \\ -X & Z \end{pmatrix}$, Y matrice de diagonalisation de $2U$.

14.63 Indication ou corrigé *4.24*
Considérons la matrice, M, de u dans une base quelconque. Cette matrice est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ puisqu'elle annule un polynôme scindé à racines simples. Comme ses coefficients et son polynôme caractéristique sont réels ses racines complexes, j et $\bar{j}$, ont le même ordre de multiplicité. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & jI_q & \\ & & \bar{j}I_q \end{bmatrix}.$$

Ainsi rg(M)= $2q$.

14.64 Indication ou corrigé *4.25*

1. La matrice A annule un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$: $P(X) = X^2 + 1$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_(\mathbb{C})$.
   Ses valeurs propres sont dans racines de P, donc dans $\{i, -i\}$. Son polynôme caractéristique est réel, donc i et $-i$ sont vp avec les même ordre de multiplicité (ainsi n est pair).
   A est semblable à $diag(i, -i, i, -i, ..., i, -i)$, elle même semblable à B. On choisit une matrice de passage $diag(Q, Q, ..., Q)$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ (il suffit de poser $DQ = QM$ pour obtenir Q).
2. On sait qu'il existe $P \in \mathcal{M}n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = B$. Comme A et B sont toutes deux réelles, il peut être intéressant de poser $P = R + iJ$ où R, J sont réelles.
   $P^{-1}AP = B$ devient $A(R + iJ) = (R + iJ)B$, équivalente

   $$\begin{cases} AR = RB, \\ AJ = JB, \end{cases}$$

   Une matrice de la forme $P' = R + \lambda J$ au moins fera l'affaire (le déterminant d'une telle matrice est un polynôme en λ, non identiquement nul puisque $R + iJ$ est inversible).

14.65 Indication ou corrigé *4.26*
Le sujet effectivement posé proposait de travailler avec a, b, c non nuls. En l'absence de précision, penser à envisager tous les cas, et pas seulement le cas générique. On peut préférer commencer par le cas $abc \neq 0$;

— $a = b = c = 0$, ...
— $a = b = 0, c \neq 0$, matrice de rang 1, non diagonalisable (nilpotente) ;
— $c = b = 0, a \neq 0$, idem ;
— $a = c = 0, b \neq 0$, matrice de projection, de rang 1, diagonale ;
— $ab \neq 0, c = 0$, matrice de rang 1, diagonalisable car ses vp sont 0 et b et

$$dim(Ker(A) = n - 1, dim(Ker(A - b)) \geq 1...$$

— $cb \neq 0, a = 0$, idem ;
— $ac \neq 0, b = 0$, matrice de rang 2, on détermine les valeurs propres comme dans le cas générique étudié ci-dessous, les mêmes calculs (somme=trace(A), somme des carrés = trace(A^2)), montrent que A est diagonalisable...

— **Traitons enfin le cas (générique) où** $abc \neq 0$:
Im(A_n) =vect(C_1, C_n), et $A = A_n$ est de rang 2. La valeur propre 0 est donc une vp d'ordre **au moins** $n - 2$ et le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$\chi(X) = (-1)^n X^{n-2}(X - \alpha)(X - \beta),$$

(et rien ne dit que α et/ou β ne sont pas nulles).

Comme A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha+\beta & =\operatorname{Tr}(A) & =b \\ \alpha^2+\beta^2 & =\operatorname{Tr}(A^2) & =2(n-1)ca+b^2 \end{array}\right.$$

En effet, un calcul par blocs donne $A_n^2 = \begin{bmatrix} ca & ca & \dots & ca & bc \\ ca & ca & \dots & ca & bc \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ca & ca & \dots & ca & bc \\ ba & ba & \dots & ba & (n-1)ca+b^2 \end{bmatrix}$. En élevant la première ligne au carré, en retranchant la seconde nous obtenons la somme et le produit des deux nombres qui sont **les** racines de $X^2 - bX - (n-1)ca = 0$. Comme $ca \neq 0$, ces racines sont non nulles.

— si $\Delta = b^2 + 4(n-1)ca \neq 0$, α et β sont distinctes, la somme des dim des sev propres est $n-2+1+1 = n$, A est diagonalisable ;
— si $\Delta = b^2 + 4(n-1)ca = 0$, $\alpha = \beta = b/2$ est valeur propre d'ordre 2. Recherchons le sev propre associé. Il a pour équation

$$(A_n - b/2I_n) = \begin{bmatrix} & & & a \\ & -b/2I_{n-1} & & \vdots \\ & & & a \\ c & \dots & c & b/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

et, comme $b \neq 0$, il est au plus de dimension 1. A_n n'est pas diagonalisable.

Bilan : A_n est diagonalisable ssi $\Delta = b^2 + 4(n-1)ca \neq 0$, y compris dans les cas précédents.

14.66 Indication ou corrigé *4.27*

1. Le rang est au plus égal à 2. Plus précisément,
   (a) $\text{rg}(A_n) = 0$ ssi $a_j = 0$, pour $1 \leq j \leq n$; la matrice est alors diagonale.
   (b) $\text{rg}(A_n) = 1$ ssi $a_j = 0$ pour $1 \leq j \leq n-1$ et $a_n \neq 0$; la matrice est encore diagonale.
   (c) $\text{rg}(A_n) = 2$ ssi il existe $1 \leq j \leq n-1$ tq $a_j \neq 0$;
   dans ce cas
   $$Ker(A_n) = \left\{x; (x_n = 0) \cap (\sum a_i x_i = 0)\right\}$$
   et a pour base la famille des $n-2$ vecteurs :
   $$(-a_j, 0, ..., \underline{a_1}, ..., 0), (0, -a_j, ..., \underline{a_2}, ..., 0), ..., (0, 0, ..., \underline{a_{n-1}}, ..., -a_j, 0)$$
   où l'on a souligné la position j.
2. Le polynôme caractéristique est de la forme $P(x) = (-1)^n x^{n-2}(x-\alpha)(x-\beta)$ avec $\alpha + \beta = Tr(A_n) = a_n$. On ne sait pas pour l'instant si α, β sont distinctes ou différentes de 0...
3. **On se place dans le cas où A_n est de rang 2.** On peut procéder comme dans l'exercice précédent ou étudier le système $A_n X = \lambda X$, pour $\lambda \neq 0$. C'est ce que nous allons faire. On considère $\lambda \neq 0$.

   • L'étude des $n-1$ premières lignes de l'équation $A_n X = \lambda X$ montre que les solutions non nulles sont de la forme $X = x_n(a_1/\lambda, a_2/\lambda, ..., a_{n-1}/\lambda, 1)$ et lorsque λ est vp non nulle, $\text{Ker}(X - \lambda)$ est de dimension 1.

   • La dernière ligne s'écrit $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$. Cela donne une équation pour les valeurs propres autres que 0.

   Bilan :
   (a) Si $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$, A_n admet au plus un vp non nulle, elle n'est pas diagonalisable car la somme des dim des sev propres est $(n-2)+1 < 1$ ou la somme des dim des sev propres est $(n-2) < 1$ (0 seule vp avec $a_n = 0$ et $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$).
   (b) Si $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$ et $a_n^2 - 4\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$, A_n admet deux vp autres que 0 et distinctes. Elle est diagonalisable car la somme des dim des sev propres est $(n-2)+1+1 = n$.
   (c) Si $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$ et $a_n^2 - 4\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$, A_n a pour vp 0 et une vp double non nulle mais la somme des dim des sev propres est $(n-2)+1 < n$. Elle n'est pas diagonalisable.

14.67 Indication ou corrigé *4.28*

1. On commence par rechercher les polynômes annulateurs de B. Pour calculer $F(B)$ où F est un polynôme, observons que $B^{2p} = \begin{bmatrix} A^p & 0_n \\ 0_n & A^p \end{bmatrix}$ et $B^{2p+1} = \begin{bmatrix} 0_n & A^p \\ A^{p+1} & 0_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Ainsi en notant
   $$F(X) = \sum a_j X^j = \sum a_{2j} X^{2j} + X \sum a_{2j+1} X^{2j} = U(X^2) + XV(X^2),$$
   nous avons $F(B) = \begin{bmatrix} U(A) & V(A) \\ A\,V(A) & U(A) \end{bmatrix}$ et il apparaît que les énoncés suivants sont équivalents :
   — $F(B) = 0$;
   — $U(A) = V(A) = 0$;
   — il existe un couple de polynômes (U_1, V_1) tel que $U(X) = \pi_A(X)U_1(X)$ et $V(X) = \pi_A(X)V_1(X)$;
   — $F(X) = \pi_A(X^2)\left(U_1(X^2) + XV_1(X^2)\right)$.
2. Les polynômes annulateurs de B sont donc de la forme $F(X) = \pi_A(X^2)\left(U_1(X^2) + XV_1(X^2)\right) = \pi_A(X^2)P(X)$ où$P(X)$ est quelconque. $\pi_A(X^2)$ est donc le polynôme minimal de B.

3. • si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\pi_A(X)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. On l'écrit $\prod(X-\lambda_i)$ et $\pi_A(X^2)=\prod(X^2-\lambda_i)=\prod(X-\omega_i)(X+\omega_i)$avec $\omega_i^2=\lambda_i$.
   Si un des λ_i est négatif strictement, $\pi_B(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, B n'est pas trigonalisable.
   Si un des λ_i est nul, 0 est racine double de $\pi_B(X)$ et B n'est pas diagonalisable.
   Si tous les λ_i sont strictement positifs, $\pi_B(X)$ a des racines simples et B diagonalisable.
   • Réciproquement : si B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $\pi_A(X^2)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Or, $\pi_A(X^2)=\prod(X^2-\lambda_i)=\prod(X-\omega_i)(X+\omega_i)$avec $\omega_i^2=\lambda_i$, si les $\pm\omega_i$ sont distincts, il en va de même des $\lambda_i=(\pm\omega_i)^2$ puisque $(\pm\omega_i)^2\neq(\pm\omega_j)^2$. Ainsi A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et inversible.
   Bilan : B diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ ssi A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et inversible.

14.68 Indication ou corrigé *4.29*

1. Soit $\chi(X)$ le polynôme caractéristique de f. Il est de la forme
$$\chi(X)=(-1)^n X^p\left(X^{n-p}+a_1X^{n-p-1}+...+a_p\right)=X^pQ(X), a_p\neq 0.$$
   Par le lemme des noyaux, $E=\mathrm{Ker}(f^p)\oplus\mathrm{Ker}(Q(f))=G\oplus F$.
   La restriction de f à F est un isomorphisme, en effet, si $\vec{x}\in F$ et $f(\vec{x})=0$, alors $Q(f)(\vec{x})=a_p\vec{x}=\vec{0}$.
   La restriction de f à G est nilpotente d'ordre p.
2. Le polynôme caractéristique est $\chi(x)=\left(x^2-4\,x+5\right)x^2$.
   Les noyaux $F=\mathrm{Ker}(Q(f))$ et $G=\mathrm{Ker}(f^2)$ ont pour bases respectives :
$$\{[1,1,0,1],[0,0,1,0]\}\,,\text{et }\{[0,1,1,0],[1,0,0,0]\}\,.$$
   On pose alors $P=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$ et $B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$
3. Calculons tout d'abord B^p. On pose $U=\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$ C'est une matrice de similitude, on l'écrit
$$U=\sqrt{5}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$
   On peut aussi travailler dans $\mathbb{C}$; les valeurs propres sont $2\pm i$, et MAPLE fait le reste :

```
U:=submatrix(B, 1..2,1..2);
eigenvects(%);

P1:=augment(vector([-I, 1]),vector([I, 1]));
V:=evalm(P1^(-1)&*U&*P1);
PI:=p->evalm(P1&*map(x->x^p,evalm(V))&*P1^(-1)):
PI(p);
```

   Ce qui donne $U^p=$
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\,(2+i)^p+\frac{1}{2}\,(2-i)^p & \frac{i}{2}\,(2+i)^p-\frac{i}{2}\,(2-i)^p\\ -\frac{i}{2}\,(2+i)^p+1/2\,i\,(2-i)^p & \frac{1}{2}\,(2+i)^p+\frac{1}{2}\,(2-i)^p\end{bmatrix}.$$

On obtient, pour $p \geq 2$, $B^p =$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,(2+i)^p + \frac{1}{2}\,(2-i)^p & -\frac{i}{2}\,(2+i)^p + \frac{i}{2}\,(2-i)^p & 0 & 0 \\ \frac{i}{2}\,(2+i)^p - \frac{1}{2}\,i\,(2-i)^p & \frac{1}{2}\,(2+i)^p + \frac{1}{2}\,(2-i)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où, si on le désire, $A^p =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{2}\,(2+i)^p - \frac{i}{2}\,(2-i)^p & -\frac{1}{2}i\,(2+i)^p + \frac{i}{2}\,(2-i)^p & -\frac{i}{2}\,(2+i)^p + \frac{i}{2}\,(2-i)^p + \frac{1}{2}\,(2+i)^p + \frac{1}{2}\,(2-i)^p \\ 0 & \frac{i}{2}\,(2+i)^p - 1/2i\,(2-i)^p & -\frac{i}{2}\,(2+i)^p + \frac{i}{2}\,(2-i)^p & -\frac{i}{2}\,(2+i)^p + \frac{i}{2}\,(2-i)^p + \frac{1}{2}\,(2+i)^p + \frac{1}{2}\,(2-i)^p \\ 0 & -\frac{1}{2}\,(2+i)^p - \frac{1}{2}\,(2-i)^p & \frac{1}{2}\,(2+i)^p + \frac{1}{2}\,(2-i)^p & \frac{1}{2}\,(2+i)^p + \frac{1}{2}\,(2-i)^p + \frac{i}{2}\,(2+i)^p - \frac{i}{2}\,(2-i)^p \\ 0 & \frac{i}{2}\,(2+i)^p - \frac{i}{2}\,(2-i)^p & -\frac{i}{2}\,(2+i)^p + \frac{i}{2}\,(2-i)^p & -\frac{i}{2}\,(2+i)^p + \frac{1}{2}i\,(2-i)^p + \frac{1}{2}\,(2+i)^p + \frac{1}{2}\,(2-i)^p \end{bmatrix}$$

14.69 Indications ou corrigé 4.30

1. B et sa transposée ont le même polynôme minimal ; de plus si ${}^tBX = \lambda X$, on a : ${}^tXB = \lambda {}^tX$.
2. Observons : si X, Y sont des vp de A et ${}^tB$ associés à λ et μ, on a, avec $M = X{}^tY$:

$$f(M) = A(X{}^tY)B = \lambda\mu X{}^tY = \lambda\mu M.$$

   Supposons A et B diagonalisables et considérons $(X_i)_i$ base de vp de A et $(Y_j)_j$ base de vp de ${}^tB$ (dans $\mathbb{K}^n$). Les n^2 matrices $M = X_i\,{}^tY_j$ sont des vecteurs propres de f (facile). Cette famille de vecteurs de E est libre, en effet, supposons que

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} X_i^t Y_j = 0, .$$

   Fixons j et multiplions à droite par W_j orthogonal à $(Y_1, ..., \widehat{Y_j}, ...Y_n)$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$. Il vient :

$$\left(\sum_i \alpha_{i,j} X_i\right)^t Y_j \overline{W_j} = 0,$$

   comme ${}^tY_j\overline{W_j} \neq 0$, le reste suit...
   Réciproque : par contre, si f est diagonalisable et de la forme $M \to AMB$, on ne peut affirmer que A et B sont diagonalisables (prendre $A = 0$, B qque).
3. Un endomorphisme de E est défini par ses valeurs sur la base canonique qui est formée des matrices $E_{i,j} = e_i\,{}^te_j$.
   Considérons dans $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension n^4, les endomorphismes $\phi_{i,j,k,l} \in \mathcal{L}(E)$, tels que

$$\begin{cases} \phi_{i,j,k,l}(E_{i,j}) & = E_{k,l}, \\ \phi_{i,j,k,l}(E_{i',j'}) & = 0, \qquad \text{si } (i',j') \neq (i,j) \end{cases}$$

   Ils forment la base canonique de $\mathcal{L}(E)$ et vérifient

$$\phi_{i,j,k,l}(E_{i,j})(M) = E_{k,i} M E_{j,l},$$

   en effet, $\phi_{i,j,k,l}(M) = (e_k^t e_i)M(ej^t e_k)$, pour tout $E_{i',j'}$.

14.70 correction 4.31

1. Le polynôme minimal π, divise $(X^3 - 1) = (X-1)(X^2 + X + 1)$.
   — si $\pi = X - 1$, $f = id_E$ et $\chi_f = (X-1)^n$.
   — si $\pi = X^2 + X + 1$, f n'a pas de vp réelle ni de vp complexe autre que 1, j, j^2, donc $\chi_f = (X^2 + X + 1)^{n/2}$. Ce qui impose que n est pair.

— si $\pi = X^3 - 1$, $\chi_f = (X-1)^\alpha (X^2+X+1)^\beta$ pour les mêmes raisons. On a $\alpha + 2\beta = n$.

2. Lorsque $n = 3$, deux cas sont possibles :
   — $f = id_E$
   — $\chi_f = X^3 - 1$ et par le lemme des noyaux,

$$E = ker(f-1) \oplus ker(f^2+f+1).$$

   Il existe une base dans laquelle

$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

   Les seules solutions réelles sont les matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d-1 & b \\ 0 & -\dfrac{1+d^2+d}{b} & d \end{bmatrix}$$

   (voir feuille de calcul : cube_endom.mws)

3. Lorsque $n = 4$, on peut avoir
   — $\chi = (X-1)^4$ et $f = id_E$,
   — $\chi = (X-1)^2(X^2+X+1)$ et par le lemme des noyaux, il existe une base dans laquelle

$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

   $u = 0$ ssi $\pi = (X-1)(X^2+X+1)$ et la sous-matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est comme en 2.
   — $\chi = (X^2+X+1)^2$, on a ici tout intérêt à travailler dans le domaine complexe.

$$E^c = ker((f-j)^\alpha) \oplus ker((f-\bar{j})^\alpha) = F \oplus G.$$

   Il existe une base $(u, v, \bar{u}, \bar{v})$, dans laquelle,

$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} A & O \\ O & \bar{A} \end{bmatrix}.$$

   avec $A = \begin{bmatrix} j & * \\ 0 & j \end{bmatrix}$, et $* = 0$ si $\alpha = 1$.

14.71 Indications ou corrigé 4.32

1. Deux façons d'aborder le problème : soit en recherchant les relations entre vp et vp, soit en recherchant les polynômes annulateurs.

$$B = \begin{bmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{bmatrix}.$$

   (a) **Comparaison des éléments propres de A et B**

— Remarquons que $rg(B) = rg(A) \leq n$, donc, dans tous les cas $0 \in Sp(B)$ avec $\dim \ker \mathrm{B} \geq 2\mathrm{n}$.

— Si $\lambda \in Sp(A)$ et $AX = \lambda X$, on a $B \begin{bmatrix} X \\ X \\ X \end{bmatrix} = 3\lambda \begin{bmatrix} X \\ X \\ X \end{bmatrix}$. Donc $3Sp(A) \subset Sp(B)$.

— Inversement, si $\mu \in Sp(B)$, si $Y \in K^{3n}$ vérifie $BY = \mu Y$, alors

$$A \begin{bmatrix} X \\ X' \\ X" \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} X \\ X' \\ X" \end{bmatrix}.$$

Donc, si $\mu \neq 0$, $X = X' = X"$, Y est de la forme $\begin{bmatrix} X \\ X \\ X \end{bmatrix}$, où X est vp de A associé à $\mu/3$.

Donc $Sp(B) \subset 3Sp(A) \cup \{0\}$ et si $\mu \neq 0$, $\dim \ker(\mathrm{A} - \lambda) = \dim \ker(\mathrm{B} - 3\lambda)$.

— Comme $Sp(B)$ contient 0, on a $Sp(B) = 3Sp(A) \cup \{0\}$.

(b) **Polynômes en A et en B.**

• On commence par calculer B^n : $B^0 = I_{3n}$, $B^n = 3^{n-1} \begin{bmatrix} A^n & A^n & A^n \\ A^n & A^n & A^n \\ A^n & A^n & A^n \end{bmatrix}$, si $n \geq 1$. Soit alors le polynôme $P(X) = \sum a_k X^k$, on lui associe $Q(X) = P(X) - P(0)$, il vient

$$P(X) = \begin{bmatrix} a_0 I_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 I_n & 0 \\ 0 & 0 & a_0 I_n \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{d} 3^k a_k \begin{bmatrix} A^k & A^k & A^k \\ A^k & A^k & A^k \\ A^k & A^k & A^k \end{bmatrix}$$

$$P(B) = a_0 I_{3n} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Q(3A) & Q(3A) & Q(3A) \\ Q(3A) & Q(3A) & Q(3A) \\ Q(3A) & Q(3A) & Q(3A) \end{bmatrix}$$

En conséquence, $P(X)$ annule B ssi $P(0) = 0$ et $P(3X) = Q(3X)$ annule A.

• **Si A est diagonalisable,** il existe un polynôme scindé à racines simples $F(X)$ qui annule A.

— Si 0 est racine de ce polynôme, on pose $P(X) = F\left(\frac{X}{3}\right)$. C'est un polynôme annulateur de B d'après ce qui précède. Comme il s'agit encore d'un polynôme scindé à racines simples, B est diagonalisable.

— Si 0 n'est pas racine de ce polynôme, on pose $P(X) = \frac{X}{3} F\left(\frac{X}{3}\right)$. C'est un polynôme annulateur de B scindé à racines simples, B est diagonalisable.

• **Supposons B diagonalisable.** Soit G un polynôme annulateur à racines simples. On a $G(0) = 0$ et $G(3A) = 0$. Comme $G(3X)$ est lui aussi à racines simples, A est diagonalisable.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} A & A & A & A \\ A & 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 & A \\ A & A & A & A \end{bmatrix}$.

(a) • Commençons par évaluer le rang de B puis son noyau. Son rang est égal à 4 (en effet les colonnes 1 et 7, 2 et 8 sont égales de même que les colonnes 3 et 5, 4 et 6). Le noyau est formé des vecteurs $Z = [X_1, X_2, -X_2, -X_1] \in \mathbb{C}^8, X_i \in \mathbb{C}^2$... et il est bien de dimension 4.

• Étudions le système $BZ = \lambda Z$, $\lambda \neq 0$, $Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix}$, qui s'exprime $\sum AZ_i = \lambda Z_1 = \lambda Z_4, AZ_1 + AZ_4 = \lambda Z_2 = \lambda Z_3$.

— si $\lambda \neq 0$, $Z_1 = Z_4, Z_2 = Z_3$,

—

(b)

14.72 Indications ou corrigé 4.33

1.
2.

14.73 Indications ou corrigé 4.34

1. Soient f et g les endomorphismes canoniquement associés à X et A.

• $X^2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$. Si $g^2 = f$, comme f et g commutent, les sev propres de f sont stables par g. Si $\lambda \neq \mu$, X est diagonale (les sev propres de f sont $vect(e_1), vect(e_2)$). Les 4 solutions sont $X = \begin{bmatrix} \pm\ell & 0 \\ 0 & \pm m \end{bmatrix}$ avec $\ell^2 = \lambda, m^2 = \mu$.
Si $\lambda = \mu$, X est de la forme ℓU où U est une matrice de symétrie quelconque.

• $X^2 = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose $a \neq 0$. De la même façon que précédemment, $vect(e_1)$ sev propre de f est stable par g et $X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$. En écrivant $X^2 = A$ on obtient : $x^2 = \lambda, z^2 = \lambda$ et $(x + z)y = a$.
Comme $a \neq 0$, il n'y a pas de solution si $\lambda = 0$ (dans ce cas A est nilpotente d'ordre 2, non nulle, il n'existe pas de matrice nilpotente d'ordre supérieur à 2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$).
Si $\lambda \neq 0$, cela impose $x = z = \pm\ell$ et $y = a/2x$. Il y a donc 2 solutions.

• Comme toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable et en particulier diagonalisable si ses vp sont distinctes, A est semblable à l'un des deux types de matrices qui précèdent ; l'équation $X^2 = A$ admet des solutions si A n'est pas nilpotente d'ordre 2. En effet, les équations $X^2 = A$ et $P^{-1}\,X^2\,P = P^{-1}\,A\,P$ sont équivalentes...

2. (a) Solutions de $e^z = a + ib$: On écrit $z = x + iy$. $e^z = e^x e^{iy} = \sqrt{a^2 + b^2}e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi]$ est l'argument de $a + ib$.
Cette équation conduit au système $\left\{ \begin{array}{lcl} e^x & = & \sqrt{a^2 + b^2} \\ y & \equiv & \theta\ [2\pi] \end{array} \right.$ Lorsque $a+ib \neq 0$ les solutions sont les complexes $z = \ln\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Remarque : on sait exprimer θ si l'on suppose que $a + ib \notin \mathbb{R}^-$. En effet,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \cos\theta & = 2\cos^2\theta/2 - 1 & = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta & = 2\cos\theta/2\cos\theta/2 & = \dfrac{b}{r} \\ \tan\theta/2 & = \dfrac{b}{a + r} & \in]-\pi/2, \pi/2[\end{array} \right.$$

Cela donne :

$$z = \ln\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) + i\left(2\arctan\left(\frac{b}{a + r}\right) + 2k\pi\right).$$

(b) L'application $exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, n'est jamais surjective car $\det(\exp(A)) \neq 0$.
Montrons, lorsque $n = 2$ que toute matrice inversible admet un antécédent par exp.
Soit A une matrice inversible. Si ses valeurs propres sont distinctes, elle est diagonalisable et il existe P telle que $P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = D$.
Comme $\lambda\mu \neq 0$, il existe z_1 et z_2 tels que $e^{z_1} = \lambda$ et $e^{z_2} = \mu$, est les équations $e^X = D$ et $e^M = A$ ont des solutions.
Si A n'est pas diagonalisable, elle reste trigonalisable et semblable à $T = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Sans chercher toutes les solutions on remarque que $X = \begin{bmatrix} z & w \\ 0 & z \end{bmatrix}$ vérifie

$$e^X = e^{\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}} \times e^{\begin{bmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^z & we^z \\ 0 & e^z \end{bmatrix}$$

et c'est une solution de $e^X = T$ ssi $e^z = \lambda (\neq 0)$ et $w = ae^{-z}$.

14.74 Indications ou corrigé 4.35

On écrira par blocs $A = \begin{bmatrix} U & V \\ -{}^tV & {}^tU \end{bmatrix}$; chaque bloc a une même forme remarquable, les calculs (par blocs) donnent, en observant que les matrices commutent :

$$A^tA = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

1. Le déterminant a pour carré $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4$, il est donc $\pm(a^2+...+d^2)^2$. Comme c'est un polynôme en (a, b, c, d), il suffit de le calculer lorsque $(a, b, c, d) = (a, 0, 0, 0)$. Le coefficient de a^4 est $+1$, donc $D = (a^2+...+d^2)^2$.
   Une idée pour étudier le rang : deux cas se présentent,
   — soit $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$ et A est de rang 4 ;
   — soit $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$ et $A\,{}^tA = 0$, dans ce cas $Im({}^tA) \subset Ker(A)$ en notant $d = rg(A) = rg({}^tA)$, nous avons $d \leq 4-d$, ce qui impose $d \leq 2$, comme U est inversible, c'est fini.
2. Si $\det(A)$=0, A est de rang 2 et $Sp(A) = \{0, 0, \lambda, \mu\}$. Dans ce cas, la somme des racines est $4a$ la somme des carrés est $Tr(A^2)$...

14.75 Indications ou corrigé 4.36

1. Deux matrices semblables ont des exponentielles semblables (passage à la limite dans une fonction $A \to P^{-1}AP$ continue) ; l'exponentielle d'une matrice triangulaire est triangulaire...
2. On écrit $\phi = e^A - I = A + \frac{1}{2}A^2 + ... + \frac{1}{n!}A^n$,
   Si $x \in Ker(A)$, alors $\phi x = 0$;
   Réciproquement, supposons que $\phi x = \left(A + \frac{1}{2}A^2 + ... + \frac{1}{n!}A^n\right) x = 0$;
   on multiplie par A^{n-2} pour obtenir $A^{n-1}x = 0$, puis par A^{n-3} pour obtenir $A^{n-2}x = 0$, etc... pour obtenir enfin $Ax = 0$.
3. Soit $M(a, b) = \begin{bmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & b+a \end{bmatrix}$.

(a) $M(a,b) = bI_3 + aJ$ où $J = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$. Comme ces deux matrices commutent

$$exp(bI_3 + aJ) = exp(bI_3) \times exp(aJ).$$

Quelques calculs simples et une récurrence donnent pour $n \geq 1$, $J^n = 2^{n-1}J$. Il vient donc

$$exp(aJ) = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}a^k}{k!} \right) J = I_2 + \frac{e^{2a}-1}{2} J$$

$$exp((M(a,b)) = M\left(\frac{e^{2a}-1}{2} e^b, e^b \right).$$

(b) On observe que $\mathcal{G}$ est stable par multiplication, puisque

$$M(a,b) \times M(a',b') = (aJ+bI_3)(a'J+b'I_3) = (ab'+a'b+2aa')J+bb'I_3 = M(ab'+a'b+2aa', bb').$$

Un élément de $\mathcal{G}$ est inversible ssi son déterminant $b^2(2a+1)$ est non nul, soit si $b \neq 0$ et $2a + b \neq 0$. Vérifions que cet inverse est encore un élément de $\mathcal{G}$: il suffit d'observe que

$$M(a,b)M(a',b') = I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} bb' & = 1 \\ ab' + a'b + 2aa & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b' & = \dfrac{1}{b} \\ a' & = \dfrac{-a}{b(b+2a)} \end{cases}$$

Les éléments inversibles $\mathcal{G}$ forment donc un groupe.

• **Sous-groupes de matrices inversibles contenus dans $\mathcal{G}$?**

Les sous-groupe de $GL_3(\mathbb{K})$ contenus dans $\mathcal{G}$ sont aussi des sous-groupes de $\mathcal{G}^+$. Que dire de plus ?

(c) les éléments de $\mathcal{G}^\times$ sont ils dans l'image de $\mathcal{G}^\times$ par exp ?

Considérons $aJ = bI_3$ et étudions l'équation $exp(\alpha J + \beta I_3) = aJ + bI_3$. On a

$$exp(\alpha J + \beta I_3) = aJ + bI_3 \Leftrightarrow \begin{cases} e^\beta & = b \\ \dfrac{e^{2\alpha}-1}{2} e^\beta & = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^\beta & = b \\ e^{2\alpha} & = \dfrac{2a+b}{b} \end{cases}$$

On est ramené à la discussion d'équations scalaires, la situation n'est pas la même selon que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Il suffit d'observer que dans $\mathbb{R}$ exp est surjective sur $\mathbb{R}+*$, dans $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$...

14.76 Indications ou corrigé 4.37

1. Pour déterminer le rang de f^2, observons que $\text{Im}(f)$ est stable par f et considérons les endomorphismes induits par f :

$$\mathbb{K}^n \to \text{Im}(f) \to \text{Im}(f^2).$$

L'application $\text{Im}(f) \to \text{Im}(f^2)$ est définie sur un ev de dimension 2, son noyau est $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ de dimension 1, par le théorème du rang, $f(\text{Im}f) = \text{Im}(f^2)$ est de dimension 1.

2. Commençons par exploiter les informations sur f. Considérons e_1 vecteur directeur de $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Complétons en une base de $\text{Ker}(f)$: $(e_1, ..., e_{n-2})$. Ajoutons e_{n-1} tel que (e_1, e_{n-1}) soit une base de $\text{Im}(f)$. La famille $(e_1, ..., e_{n-1})$ est libre (facile à vérifier).

Complétons cette famille en une base de $\mathbb{K}^n$: $(e_0, e_1, ..., e_{n-1})$. La matrice de f dans cette base est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 0 & \dots & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Nous avons alors

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ bc & 0 & \dots & 0 & bd \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ cd & 0 & \dots & 0 & d^2 \end{bmatrix}.$$

14.77 Indications ou corrigé 4.38

1.
2.

14.78 Indications ou corrigé 4.39

1. **Réponse :**

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Conseil : procéder par opérations élémentaires sur une matrice de taille 4 ou 5, puis conjecturer et démontrer ;

   Rappel de la méthode d'inversion : on écrit côte à côte A_n et I_n auxquelles on fait subir le même traitement... description de l'algorithme en 14.40.

2. Cette matrice a pour polynôme caractéristique

$$-\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)(x+1)$$

   qui est scindé à racines simples : elle est diagonalisable et χ_A est le polynôme minimal.

14.79 Indication ou corrigé 4.40

A_{2n} symétrique réelle, est diagonalisable. On suppose $(a, b) \neq (0, 0)$.

1. si n=1, deux cas se présentent,
   — $a^2 - b^2 = 0$ et A est de rang 1 semblable à diag(0,2a). La matrice de passage est selon que $a = \pm b$: ou ...
   — $a^2 - b^2 \neq 0$, A_2 est semblable à $diag(a + b, a - b)$ et de rang 2.
2. A est de rang ≤ 4, en effet, Im A est engendré par les colonnes (C_1, C_2, C_3, C_{2n}).
   — si $a^2 - b^2 = 0$, C_1, C_{2n} sont colinéaires de même que C_2, C_3. A_{2n} est donc de rang 2.
   — si $a^2 - b^2 \neq 0$, A_{2n} est de rang 4.

3. On étudiera les cas $a = b, a = -b$ et $a^2 - b^2 \neq 0$ successivement.
   (a)
   (b)
   (c)

14.80 Indications ou corrigé 4.41

ϕ est clairement linéaire. On observe que $\phi^{(8)} = \phi \circ ... \circ \phi = id_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})}$.
Les valeurs propres réelles ou complexes de ϕ sont donc parmi les racines $8^{ièmes}$ de l'unité. Comme le polynôme $X^8 - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de ϕ, cet endomorphisme est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Repérons ses éléments propres.

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \phi(M) = \begin{bmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{bmatrix},$$

Que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on a :

• 1 est valeur propre : $\phi(M) = M$ ssi $a = b = c = d = f = g = h = i$. Les sev propre associé à 1 est donc de dimension 2 et admet pour base le couple $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$.
• -1 est valeur propre : $\phi(M) = -M$ ssi $a = -b = c = -f = i = -h = g = -d = a$ et $e = 0$. Le sev propre associé à -1 est donc la droite vectorielle engendrée par $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Dans le cas réel, ϕ n'est donc pas diagonalisable. Par contre ϕ est diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En effet, la somme des dimensions des sev propres est égale à 9 (2+1+1+1+1+1+1+1) :

• **λ racine $8^{ième}$ de l'unité autre que 1 est valeur propre de sev propre associé de dimension 1 :** $\phi(M) = \lambda M$ ssi $e = 0$ et $b = \lambda a, c = \lambda^2 a, f = \lambda^3 a, i = \lambda^4 a, etc...$ Le sev associé est donc engendré par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^7 & 0 & \lambda^3 \\ \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^4 \end{bmatrix}$$

14.81 Indications ou corrigé 4.42

1. Considérons $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
   On a $Q^{-1}exp(A)Q = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.
   Considérons alors
   $$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Lambda_i(X)$$
   où les Λ_i sont les polynômes d'interpolation de Lagrange tels que $\Lambda_i(e^{\lambda_j}) = \delta_i^j$. Il est immédiat que $P(Q^{-1}exp(A)Q) = Q^{-1}AQ$ donc que $P(expA) = A$.
2. Supposons que $expA = expB$. Comme B commute avec $expB$, elle commute avec $expA$ donc avec $A = P(expA)$. Deux endomorphismes diagonalisables qui commutent ont une base de diagonalisation commune. Il existe donc $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $R^{-1}\,A\,R = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $R^{-1}\,B\,R = diag(\mu_1, ..., \mu_n)$ soient toutes deux diagonales. Il vient alors $exp(R^{-1}\,A\,R) = exp(R^{-1}\,B\,R)$ donc $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$, d'où $\lambda_i = \mu_i$, pour tout i et $A = B$

14.82 Indications ou corrigé 4.43

1. Observons tout d'abord que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}-$ev ou toute matrice complexe admet une valeur propre et des vecteurs propres (le polynôme caractéristique admet une racine). Supposons que $AB = 0$.
   • si B admet une valeur propre non nulle λ, il existe $X \neq 0$ tel que
   $$A\,B\,X = A(\lambda X) = \lambda AX = 0.$$
   Ainsi $X \neq 0$ et $X \in Ker(A) \cap Ker(B - \lambda)$.
   • si toutes les vp de B sont nulles et $B \neq 0$,, B est nilpotente et il existe $pgeq21$ tel que $B^p = 0$ et $B^{p-1} \neq 0$. On considère donc un vecteur X tel que $Y = B^{p-1}X \neq 0$. On observe que $AY = AB(B^{p-2}X) = 0$ et que $BY = B^pX = 0$. Ainsi $Y \neq 0$ est dans $ker(A) \cap \ker(B)$.
   • enfin, si $B = 0$ un vp de A (il en existe puisque A admet au moins une vp dans $\mathbb{C}$) est aussi vp de B.
2. ϕ est correctement définie puisque le polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n est de degré n, de coefficient de tête $(-1)^n$; ; la surjectivité est immédiate si l'on observe que tout polynôme
   $$P(X) = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0)$$
   est associé (est le polynôme caractéristique de) sa matrice compagnon :
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

14.83 Indication ou corrigé 4.44

1. On obtient sans peine $\chi_A(X) = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0)$
2. Étudions un système $AX = \lambda X$.
   La première ligne donne $\lambda x_1 = -a_0 x_n$;
   La ligne k où $2 \leq k \leq n$ donne $x_{k-1} - \lambda x_k - a_{k-1}x_n = 0$.
   A est de rang n ssi $a_0 \neq 0$, sinon elle est de rang $n-1$. Si 0 est valeur propre le sev associé est donc une droite.
   Supposons que λ soit une valeur propre non nulle. Il vient
   $$x_1 = \frac{-a_0}{\lambda}x_n,\ x_k = \frac{1}{\lambda}(x_{k-1} - a_{k-1}x_n)...$$
   $\mathrm{Ker}(A-\lambda)$ est donc une droite vectorielle. A est donc diagonalisable ssi elle admet n valeurs propres distinctes.

14.84 Indication ou corrigé *4.45*

Décomposition diagonale + nilpotent qui commutent :
Montons tout d'abord qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = T = D+N$ où D est diagonale, N nilpotente, ces deux matrices commutant.
En effet, si f est l'endomorphisme canoniquement associé à M, si $\chi_f(X) = (-1)^n \prod(X - \lambda_i)^{n_i}$, d'après le lemme des noyaux :
$$\mathbb{C}^n = \oplus_i \ker(f - \lambda_i id)^{n_i},$$

chacun des ces noyaux étant stable par f.
La restriction de $(f-\lambda_i)$ à chaque sev $\ker(f-\lambda_i id)^{n_i}$ est nilpotente. On peut écrire dans une base adaptée :

$$T = Mat(f,(a_k)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1}+N_1 & O & \dots & O \\ O & \lambda_2 I_{n_2}+N_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & & \lambda_p I_{n_p}+N_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & O & \dots & O \\ O & \lambda_2 I_{n_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & & \lambda_p I_{n_p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 & O & \dots & O \\ O & N_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & & N_p \end{bmatrix} ...$$

14.85 Indication ou corrigé *4.46*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, la matrice par blocs : $B = \begin{bmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$.

1. Après le calcul de quelques termes on observe que $B^p = \begin{bmatrix} A^p & \alpha_p A^p \\ 0 & 3^p A^p \end{bmatrix}$ avec $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 8, \alpha_3 = 26$. Une démonstration par récurrence confirme cela et donne la relation $\alpha_{p+1} = \alpha_p + 2.3^p$ soit $\alpha_p = 3^p - 1$.
   Calcul de $P(B)$ où $P(X) = \sum a_p X^p$. Comme toujours, on se méfiera du terme constant, même si ici il ne pose pas problème :

$$P(B) = a_0 \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} + \sum_{p=1}^{n} a_p \begin{bmatrix} A^p & 3^p A^p - A^p \\ 0 & 3^p A^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(A) & P(3A)-P(A) \\ 0 & P(3A) \end{bmatrix}.$$

2. Si B est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples tel que $P(B) = 0$. On a alors $P(A) = 0$ et A est aussi diagonalisable.
3. On suppose A diagonalisable, son polynôme minimal est donc scindé à racines simples,

$$\Pi_A(X) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda).$$

   Les polynômes annulateurs de A sont de la forme $P(X) = \Pi_A(X)Q(X)$, $\Pi_A(X)$ étant le polynôme minimal de A.
   Pour un tel polynôme, $P(B) = \begin{bmatrix} P(A) & P(3A)-P(A) \\ 0 & P(3A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & P(3A) \\ 0 & P(3A) \end{bmatrix}$, avec $P(3A) = \Pi_A(3A)Q(3A)$.

   On obtient un polynôme scindé à racines simples en posant

$$P(X) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X-\lambda) \times \prod_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ 3\lambda \notin Sp(A)}} (X - 3\lambda),$$

   ce polynôme vérifie :
   — $\Pi_A(X) | P(X)$, il est donc annulateur de A

— et d'autre part $P(3A) = 0$ car $\Pi_A(X)|P(3X)$. En effet,

$$\begin{aligned}
P(3X) &= \prod_{\lambda \in Sp(A)} (3X-\lambda) \times \prod_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ 3\lambda \notin Sp(A)}} 3(X-\lambda) \\
&= 3^? \prod_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ 3\lambda \notin Sp(A)}} (X-\lambda/3) \times \left(\prod_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ \lambda/3 \in Sp(A)}} (X-\lambda/3) \times \prod_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ \lambda/3 \notin Sp(A)}} (X-\lambda) \right).
\end{aligned}$$

14.86 Indication ou corrigé *4.47*

raisonner sur le rayon spectral : $\rho(A) = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)\}$ A FAIRE

14.87 Indication ou corrigé *4.48*
Énoncé :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$. Montrer que A est nilpotente.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Supposons que A admette des valeurs propres non nulles. Après une éventuelle **réécriture** des valeurs propres, la trace de A^k est donc $\sum_{i=1}^{p} n_i \lambda_i^k = 0$ où les λ_i les valeurs propres **non nulles** et distinctes et les n_i les ordres de multiplicité des λ_i. Écrivons le système d'équations correspondant pour $k = 1, ..., p$. Il s'exprime

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^p & \lambda_2^p & \dots & \lambda_p^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice est égal au produit des λ_i et d'un déterminant de Vandermonde qui est non nul. L'équation n'est donc pas vérifiée ce qui est une **contradiction.**
Bilan : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ donc $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$ et A est nilpotente.

14.88 Indication ou corrigé *4.49*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Commençons par exprimer les puissances de B :

$$B^0 = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix}, \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = 2^{n-1} \begin{bmatrix} A^n & A^n \\ A^n & A^n \end{bmatrix}$$

Soit $F(X) = \sum a_k X^k$, avec une prudence à toujours recommandée, pour le terme constant :

$$F(B) = a_0 \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} a_k \begin{bmatrix} 2^k A^k & 2^k A^k \\ 2^k A^k & 2^k A^k \end{bmatrix}$$

$$F(B) = a_0 \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F(2A) - a_0 & F(2A) - a_0 \\ F(2A) - a_0 & F(2A) - a_0 \end{bmatrix}$$

$$F(B) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F(2A) + a_0 & F(2A) - a_0 \\ F(2A) - a_0 & F(2A) + a_0 \end{bmatrix}$$

2. Conditions nécessaires et/ou suffisantes pour que B (ou A) soit diagonalisable.
   (a) **On suppose B diagonalisable.**
   On note $\pi_B(X)$ son polynôme minimal, qui est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. On l'écrira s'il le faut, $\pi_B(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \beta_i)$. Comme $\pi_B(B) = 0$, il vient $\pi_B(2A) + b_0 = \pi_B(2A) - b_0 = 0$; cela impose $b_0 = \prod \beta_i = 0$, ce dont on pouvait a priori se douter en examinant le rang maximal pour B!
   Ainsi
   $$\pi_B(2A) = \prod_{i=1}^{k}(2A - \beta_i) = 2^k \prod_{i=1}^{k} \left(A - \frac{\beta_i}{2}\right) = 0.$$
   Comme le polynôme
   $$2^k \prod_{i=1}^{k} \left(X - \frac{\beta_i}{2}\right) = 0$$
   est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable ; de plus
   $$Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset Rac_{\mathbb{C}}(\pi_B(2X)) = \frac{1}{2} Sp_{\mathbb{C}}(B)$$
   (b) **On suppose A diagonalisable.**
   On note π_A le polynôme minimal de A. Il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et on peut l'écrire $\pi_A(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)$. Notons $a_0 = \prod \alpha_i$.
   • Supposons que $a_0 = 0$. Le polynôme F défini par
   $$F(X) = \pi_A\left(\frac{X}{2}\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{X}{2} - \alpha_i\right) = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k} (X - 2\alpha_i)$$
   est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et
   $$F(B) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F(2A) + a_0 & F(2A) - a_0 \\ F(2A) - a_0 & F(2A) + a_0 \end{bmatrix} = 0.$$
   Donc B est diagonalisable. De plus
   $$Sp_{\mathbb{C}}(B) \subset Rac_{\mathbb{C}}(F(X)) = 2 Sp_{\mathbb{C}}(A)$$

• Supposons que $a_0 \neq 0$. Le polynôme G défini par

$$G(X) = XF(X) = X\pi_A\left(\frac{X}{2}\right) = X\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{X}{2} - \alpha_i\right) = \frac{1}{2^k}X\prod_{i=1}^{k}(X - 2\alpha_i)$$

est lui-aussi scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et

$$G(B) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} AF(2A) + 0 & AF(2A) - 0 \\ AF(2A) - 0 & AF(2A) + 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Donc B est diagonalisable. De plus

$$Sp_{\mathbb{C}}(B) \subset Rac_{\mathbb{C}}(XF(X)) = 2Sp_{\mathbb{C}}(A) \cup \{0\}$$

Bilan
• A diagonalisable ssi B diagonalisable ;

Dans ce cas (mais on peut le démontrer en considérant des polynômes minimaux non nécessairement scindés à racines simples) on a aussi :
• si $0 \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, $Sp_{\mathbb{C}}(B) = 2Sp_{\mathbb{C}}(A)$;
• si $0 \notin Sp_{\mathbb{C}}(A)$, $Sp_{\mathbb{C}}(B) = 2Sp_{\mathbb{C}}(A) \cup \{0\}$;

14.89 Indication ou corrigé *4.50*

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

1. Commençons par quelques considérations (qui relèvent de l'analyse du problème) :
   • On sait que e^M et M commutent. Donc si $e^M = A$, M et A commutent et les sev propres de l'une sont stables par l'autre.
   • A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $Sp(A) = \{1 + a, 1 - a\}$.
   Deux cas se présentent à nous :
   (a) $a \neq 0$ **et** A **admet deux valeurs propres réelles distinctes.**
   On note u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et M respectivement. Les sev propres de u sont les droites $D_1 = vect(), D_2 = vect()$ qui sont stables par M telle que $e^M = A$. Nous serons amenés à distinguer les sous-cas $0 < |a| < 1$ et $|a| \geq 1$ selon que les valeurs propres sont positives ou pas.
   (b) $a = 0$ **et** $A = I_2$ **admet une valeurs propre double.**

   Étudions ces deux cas :
   (a) $a \neq 0$: Dans une base formée de vecteurs propres de u la matrice de v est aussi diagonale. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

   $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 + a & 0 \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

   On sait que $e^M = A \Leftrightarrow e^{P^{-1}MP} = P^{-1}e^M P = P^{-1}AP$. On a alors

   $$e^M = A \Leftrightarrow P^{-1}e^M P = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a & 0 \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

   On retrouve les deux sous cas annoncés :

i. Si $0 < |a| < 1$, il existe une solution et une seule M telle que

$$P^{-1}\,M\,P = \begin{bmatrix} \ln(1+a) & 0 \\ 0 & \ln(1-a) \end{bmatrix}$$

ii. Si $|a| \geq 1$, pas de solution réelle.

2. Supposons que $a = 0$ et $A = I_2$. Nous allons regarder du coté de la réduction a priori de M :

• Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire T telles que $P^{-1}\,M\,P = T = \begin{bmatrix} \lambda & x \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$. Un calcul rapide donne

$$T^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & x\sum_{i+j=n-1}\lambda^i\mu^j \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda^n & x\dfrac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu} \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix} & \text{si}\,\lambda \neq \mu \\ \begin{bmatrix} \lambda^n & n\,x\,\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} & \text{si}\,\lambda = \mu \end{cases}.$$

On en déduit

$$exp(T) = \begin{cases} \begin{bmatrix} e^\lambda & x\dfrac{e^\lambda-e^\mu}{\lambda-\mu} \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix} & \text{si}\,\lambda \neq \mu \\ \begin{bmatrix} e^\lambda & x\,e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{bmatrix} & \text{si}\,\lambda = \mu \end{cases}.$$

Nous sommes alors en mesure d'étudier l'équation $e^M = I_2$ qui se ramène à $e^T = I_2$.
On a donc $e^T = I_2$ ssi $\lambda = \mu = 0$ et $x = 0$. Ainsi, $T = I_2$ et $M = PTP^{-1} = I_2$ seule solution de l'équation.

Attention : nous avons fait un détour par $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si nous n'avons pas eu à trier entre solutions à coefficients réels ou complexes, c'est parce que la seule solution trouvée, I_2, est une matrice réelle de façon évidente.

3. Indications pour la résolution de l'équation $exp(M) = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:
On étudie le problème de la même façon que précédemment, avec deux cas $a = 0$ et $a \neq 0$.

(a) Lorsque $a = 0$ l'équation se traite à l'identique en trigonalisant v (ou M) et en justifiant que $e^\lambda = 1$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\lambda = 2ik\pi$. Pour cela on rappelle que $e^z = e^{x+iy} = e^x\,e^{iy}$...
Les solutions sont les matrices $M = e2ik\pi I_2$.

(b) Lorsque $a \neq 0$ on montre que toute solution est semblable à une matrice diagonale et on se ramène à

$$e^M = A \Leftrightarrow P^{-1}e^M\,P = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

On discute alors selon que $a = \pm 1$ (pas de solution) ou $a \neq \pm 1$... où l'on se ramène aux équations dans $\mathbb{C}$ $e^{x+iy} = 1 \pm a$...

14.90 Indication ou corrigé *4.51*

1. La matrice de f dans la base $(x, f(x), f^2(x))$ est de la forme $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$. Le polynôme caractéristique de f et de A est donc :

$$\chi_f(X) = -(X^3 - cX^2 - bX - a).$$

   Comme $X^n - 1$ est annulateur de f, $Sp_{\mathbb{C}}(A) = Rac_{\mathbb{C}}(\chi_f) \subset U_n$ (ensemble des racines $n^{ième}$ de l'unité de dans $\mathbb{C}$).
   Comme $X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est **diagonalisable** dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   χ_f admet au moins un racine réelle (son degré est impair, c'est un polynôme à coefficients réels, il change de signe etc...). Ses racines réelles vérifient $\lambda^n = 1$ donc $\lambda = 1$ si n impair, $\lambda = \pm 1$ si n pair.

2. Notons λ, μ, ν les racines complexes de χ_f avec λ réelle.
   Premier cas : les valeurs propres sont toutes réelles et alors A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à une matrice **diagonale** de la forme $J = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$.
   Si nous admettons que A est semblable à J dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ également (voir exercice classique 4.6), f est diagonalisable et les sev propres associés à 1 et -1 sont supplémentaires ; on aurait $f^2 = id$ et il n'existerait pas de base $(x, f(x), f^2(x))$. Pourquoi ?
   Second cas : les valeurs propres sont $\lambda = \pm 1, \mu = e^{2ik\pi/n}$ et $\nu = \bar{\mu}$. Dans ce cas les vp sont distinctes $\chi_f(X) = -(X - \lambda)(X - \mu)(X - \bar{\mu}) | X^n - 1$ car **ses trois facteurs sont premiers entre eux et divisent** $(X^n - 1)$ et **le théorème de Gauss** fait le reste.

3. On note toujours $\lambda = \pm 1, \mu = e^{2ik\pi/n}$ et $\nu = \bar{\mu}$. Observons que le cas $\lambda = -1$ est exclu si n est impair.
   Il vient alors $det(f) = a = \lambda$, $Trace(f) = c = \lambda + 2\cos\theta$, on obtient b en développant : $b = 1 + 2\lambda\cos\theta$.

14.4 Indications ou corrigés des exercices, fonctions de la variable réelles, suites numériques

14.91 Indications ou corrigé 5.1

1. ...
2. Quelques remarques pour commencer... Si on ne voit pas tout d'emblée, ça pourra venir quand on voudra répondre aux questions.

   $\boxed{\text{On observe}}$ rapidement que les coefficients du polynôme f_n étant positifs f_n est positive et $\nearrow$ sur $[0,+\infty[$...

   $\boxed{\text{On observe}}$ que $f_{n+1} = f_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$... (on a pensé série) ;

   $\boxed{\text{On observe}}$ que $f'_{n+1} = f_n$, (on a pensé série exponentielle) ;

   $\boxed{\text{Venons en au problème :}}$

   Comme $f'_{n+1} = f_n$, il nous vient l'idée de procéder par récurrence.
   On pose $\mathcal{P}(n) = \{\forall x \in \mathbb{R}, f_{2n}(x) > 0, \}$.
   - C'est vu pour $n = 0, n = 2$ (discriminant < 0);
   - Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   f_{2n+1} est un polynôme de **degré impair** qui change de signe et qui admet une racine réelle au moins (TVI). Comme $f'_{2n+1} = f_{2n} > 0$, f_{2n+1} (HR) la fonction polynomiale associée est strictement croissante donc **injective**.
   On note r_n la racine. Et on dessine de tableau de variations de f_{2n+2} :

x	$-\infty$		r_n		$+\infty$
$f_{2n+1} = f'_{2n+2}$		$-$	0	$+$	
f_{2n+2}	$+\infty$	$\searrow$	(min)	$\nearrow$	$+\infty$

   Que dire de ce min ? C'est là que l'on voit que
   $$f_{2n+2}(r_n) = f_{2n+1}(r_n) + \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0 + \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0.$$
   Le tour est joué...
   Pour ce qui est de l'unique racine de f_{2n+1} pour tout n la démonstration qui a été développée dans la démonstration par récurrence n'a pas à être refaite : elle vaut dès que l'on sait que f_{2n} est > 0.
3. Comment voir que $-(2n+3) < r_n < 0$?
   On écrit que $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et au point $x = r_n$, cela donne
   $$f_{2n+1}(r_n) = 0 = f_{2n}(r_n) + \frac{r_n^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   Mais $0 \leq f_{2n}(r_n) \leq 1$ (voir tableau) donc
   $$|r_n|^{2n+1} \leq (2n+1)!$$

ce qui impose $|r_n| \leq (2n+1) < (2n+3)$.
Pourquoi $(2n+3)$ et pas $(2n+1)$ me direz vous ? Réponse question suivante...

4. Comparons r_n et r_{n+1}.

$$f_{2n+3}(x) = f_{2n+1}(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \tag{14.14}$$

$$= f_{2n+1}(x) + \left(1 + \frac{x}{2n+3}\right) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \tag{14.15}$$

Faisons $x = r_n$, il vient $f_{2n+3}(r_n) > 0$ puisque $|r_n| < (2n+3)$... Cela impose, vu que f_{2n+3} est croissante, que $r_{n+1} < r_n$. Dessiner les graphes !

Limite ? $(r_n)_n$ est une suite $\searrow$. Elle admet soit une limite $\ell \in \mathbb{R}$, soit $-\infty$ pour limite.
Supposons que $\lim r_n = \ell$: on a alors $\ell \leq r_n$ et comme f_{2n+1} est $\nearrow$, $f_{2n+1}(\ell) \leq f_{2n+1}(r_n) = 0$.
Passons à la limite lorsque $n \to +\infty$: cela donne $e^\ell \leq 0$! Contradiction établie.

Important : pour faire le corrigé, j'ai exploré et pas du tout procédé dans l'ordre des questions, sans cela je n'aurais pas compris le problème et pas pu corriger l'erreur dans l'OT 2106 sur la minoration de r_n (n°89) : Cherchez, exposez vos idées, ... après un temps de réflexion quand même.

14.92 Indications ou corrigé 5.2

Partant de la relation

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d),$$

on multiplie par $(a-b)(c-a)(b-c)$ ce qui donne

$$(c-b)f(a) + (a-c)f(b) + (c-b)f(c) = \frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)f''(d);$$

Cette relation est symétrique en a, b, c; l'idée est alors d'introduire une fonction auxiliaire, par exemple

$$g(x) = (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - \frac{1}{2}(a-b)(b-x)(x-a)K...$$

Le but est de conserver $f(x)$ et d'écrire une fonction nulle en a, b et c. On a $g(a) = g(b) = 0$ dans tous les cas (ou pour tout K), et par ailleurs, $g(c) = 0$ lorsque

$$\frac{K}{2} = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

D'après le théorème de Rolle, g ayant 3 zéros dans I, g' s'annule en deux points au moins et g'' en un point d au moins. On écrit la dérivée seconde de g : $g''(x) = (b-a)f''(x) + (a-b)K$, elle et $g''(d) = 0$ ssi $K = f''(d)$ ce qui est la relation demandée.

14.93 Indication ou corrigé 5.3

1. Par définition $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes ssi $u_n = v_n + o(v_n)$ ce qui signifie qu'il existe (ε_n) de limite nulle telle que $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n = (1+\varepsilon_n)v_n$. Comme $(\varepsilon_n)_n$ est de limite nulle, il existe un rang n_0 à partir duquel $|\varepsilon_n| \leq 1/2$. Ainsi pour $n \geq n_0$, avons nous : $(1+\varepsilon_n) > 0$ et u_n, v_n de même signe.
Le signe de $\sin\frac{1}{n} - \mathrm{th}\frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$ est celui d'un équivalent. Or,

— $\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3!n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$;

— si on ne le connaît par cœur, on calcule un DL3 de th en observant que $\text{th}'x = 1 - \text{th}^2 x$... et avec la formule de Taylor à l'ordre 3 : $\text{th}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{3!n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

— Il vient alors

$$\sin\frac{1}{n} - \text{th}\frac{1}{n} = \frac{1}{3!n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{3!n^3}$$

qui est positif à partir d'un certain rang.

2.

3.

14.94 Indications ou corrigé 5.4

1. Si $P(X) = a_n \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, où $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_p$, alors :
   — le théorème de Rolle nous dit que chaque $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ contient au moins une racine de P'
   — chaque λ_i est racine d'ordre $\alpha_i - 1$ de P'.
   On en déduit que P' admet au moins
   $$\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i - 1) + p - 1 = n - 1$$
   racines. Comme c'est un polynôme de degré n il est scindé (et n'a pas d'autre racine).
2. Si a est entier, $(PQ^a)' = Q^{a-1}(P'Q + aPQ')$. Si P et Q sont scindés, il en va de même pour PQ^a dont le polynôme dérivé admet donc $n+am-1$ racines d'après la question précédente. Ainsi, $(P'Q + aPQ')$ admet $(n + am - 1) - (a - 1)m = n + am - 1$ racines ce qui est son degré ; il est donc scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Notons $Q(X) = a_m \prod_{i=1}^{q}(X - \mu_j)^{\beta_i}$. On observe que
   $$f'(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} + a\frac{Q'(x)}{Q(x))} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{x - \lambda_i} + \sum_{j=1}^{q} \frac{a\beta_j}{x - \mu_i}.$$
   Dénombrons donc les racines de
   $$P(x)Q(x)f'(x) = P'(x)Q(x) + aQ'(x)P(x),$$
   polynôme de degré $n + m - 1$, puisque $a > 0$ (calculer le coefficient de tête).
   Notons C l'ensemble des racines communes à P et Q et $p + q - c$ le nombre des racines distinctes de PQ.
   — Comme f a pour limite $-\infty$ en les λ_i, μ_j, f admet entre deux des ces points une racine (Rolle généralisé : à démontrer à la demande, dessiner en attendant). Cela fait $p+q-c-1$ racines de f' distinctes des racines de PQ.
   — Les racines λ_i de P seul, sont des racines d'ordre $\alpha_i - 1$ de PQf'.
   — Les racines μ_j de Q seul, sont des racines d'ordre $\beta_j - 1$ de PQf'.
   — Les racines $\mu_j = \lambda_i$ appartenant à C, sont des racines d'ordre $\beta_j + \alpha_i - 1$ de PQf'.
   Tout cela nous fait
   $$\sum_{\lambda_i \notin C}(\alpha_i - 1) + \sum_{\mu_j \notin C}(\beta_j - 1) + \sum_{\lambda_i = \mu_j \in C}(\alpha_i + \beta_j - 1) + (p + q - c - 1)$$
   $$= n + m - (p - c) - (q - c) - c + (p + q - c - 1) = n + m - 1.$$

□

14.95 Indications ou corrigé 5.5..

1. Étudions f sur un tel intervalle. Il est tout d'abord évident que f change de signe et s'annule (limites). De plus f est strictement $\nearrow$ sur I_n.

$$f'(x) = \left(1+\tan^2(x)\right)\tanh(x) + \tan(x)\left(1-\tanh^2(x)\right).$$

$f'(x) > 0$ ssi $(1+\tan^2(x))\tanh(x) > -\tan(x)(1-\tanh^2(x))$.
Il SUFFIT pour cela que

$$|\tan(x)| < \frac{(1+\tan^2(x))\tanh(x)}{(1-\tanh^2(x))}.$$

Il SUFFIT pour cela que

$$\frac{\tanh(x)}{(1-\tanh^2(x))} \geq 1;$$

On résout l'inéquation du second degré, $X^2+X-1>0$, elle est satisfaite dés lors que $X > (5^{1/2}-1)/2 = .6180339890$; c'est le cas de $X = \tanh(x)$ puisque

$$evalf(tanh(\pi/2)) = .9171523357;$$

2. On a $u_n \sim_{n\to+\infty} n\pi$. Posons $u_n = n\pi + v_n$; il vient :

$$f(u_n) = f(v_n + n\pi) = \tan(n\pi + v_n)\tanh(n\pi + v_n) = 1.$$
$$\tan(v_n) = \frac{1}{\tanh(n\pi + v_n)} \sim_{n\to+\infty} 1.$$

Comme $-\pi/2 < v_n < \pi/2$, on en déduit que $v_n = \frac{\pi}{4} + o(1)$. Posons alors $v_n = \frac{\pi}{4} + w_n$, il vient :

$$w_n = \arctan\left(\frac{1}{\tanh(n\pi + v_n)}\right) - \arctan(1).$$

$$w_n = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\tanh(t_n)}\right)^2}\left(\frac{1}{\tanh(n\pi + \pi/4 + w_n)} - 1\right) \hookrightarrow \text{accroissts finis.}$$

$$w_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1-\tanh(n\pi + \pi/4 + w_n)}{2\tanh(n\pi + \pi/4 + w_n)} \sim_{n\to+\infty} \frac{1-\tanh(n\pi + \pi/4 + w_n)}{2}$$

$$w_n \sim_{n\to+\infty} e^{-2n\pi + \pi/2}.$$

Et enfin :

$$u_n = n\pi + \frac{\pi}{4} + e^{-2n\pi+\pi/2} + o(e^{-2n\pi}).$$

□

14.96 Indications ou corrigé 5.6.

Très classique

1. Écrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f"(0)}{2}\,x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

En faisant $x = \dfrac{k}{n^2}$, cela donne :

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + f'(0)\frac{k}{n^2} + \frac{f"(0)}{2}\frac{k^2}{n^4} + \frac{k^2}{n^4}\,\varepsilon\left(\frac{k^2}{n^4}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = (n+1)f(0) + f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2} + \frac{f"(0)}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^4} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^4}\,\varepsilon\left(\frac{k^2}{n^4}\right).$$

On calcule sans peine les premiers termes puisque

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On majore le terme $R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^4}\,\varepsilon\left(\frac{k^2}{n^4}\right)$:

$$|R_n| \leq \sup_{0\leq t\leq 1/n} \varepsilon(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^4} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n)$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - (n+1)f(0) + \frac{n(n+1)}{2n^2}\,f'(0) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}f"(0) + \ R_n...$$

2. Avec moins d'hypothèses sur f, pensons au TAF et écrivons $f(x) = f(0) + f'(t_x)\times x$ où t_x est compris entre 0 et x. En remplaçant comme il se doit, on obtient :

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + f'(t_k)\times\frac{k}{n^2}$$

avec t_k compris entre 0 et $k/n^2 \leq 1/n$. On ajoute et on retranche :

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = (n+1)f(0) + \frac{n(n+1)}{2n^2}\,f'(0) + \sum_{k=0}^{n}(f'(t_k) - f'(0))\times\frac{k}{n^2}.$$

Cette réécriture nous permet de majorer le reste :

$$|R'_n| \leq \sup_{0\leq t\leq 1/n} |f'(t) - f'(0)|\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2} \underset{t\to 0}{=} o(t)...$$

Bilan dans les deux cas,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - (n+1)f(0)\right) = \frac{f'(0))}{2}.$$

□

14.97 Indications ou corrigé 5.7 .

Très classique

1. étude de f
2. valeurs intermédiaires $f(n) > 0; f(n+1) < 0$.
3. classique, procéder en posant $u_n = n + v_n$ et en remplaçant... On trouvera

$$u_n = n + e^{-n} + o(e^{-n}).$$

□

14.98 Indication ou corrigé *5.8*

origine ULM, MP (vous avez raté l'occase, c'était faisable (un peu trop peut-être).*

1. On observe que 1 n'est pas racine. Si $x \neq 1$, on a

$$P_n(x) = \frac{1}{x-1}\left(x^{n+1} - 2x^n + 1\right) = \frac{1}{x-1}\, Q_n(x);$$

$$\frac{d}{dx} Q_n(x) = \left((n+1)\,x - 2\,n\right) x^{n-1}.$$

— si n est impair ($n+1$ pair), Q_n a deux racines $y_n = 1$ et $x_n > \dfrac{2n}{n+1}$:

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$\dfrac{2n}{n+1}$	∞
Q'_n	$-$	0	$+$
Q_n	$+\infty$ $\searrow$ $Q_n(1) = 0$	$(-)$	$\nearrow$ $+\infty$

— si n est pair, Q_n a aussi deux racines réelles :

x	$-\infty$	0		$\dfrac{2n}{n+1}$	∞
Q'_n	$-$	0		0	$+$
Q_n	$-\infty$ $\nearrow$	$+1$	$\searrow$	$(-)$	$\nearrow$ $+\infty$

— Dans les deux cas, P_n a donc une seule racine, x_n.

2. Comme $P_n(2) = 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 > 0$, on a $\dfrac{2n}{n+1} < x_n < 2$;
3. Soit z une racine complexe on a :

$$z^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k, \text{ d'où } P(|z|) = |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k \leq 0.$$

La lecture du tableau, quelle que soit la parité de n donne $|z| \leq x_n < 2$.

14.99 Indication ou corrigé 5.9

1.
2.
3.

14.100 Indication ou corrigé 5.10

1. Variations de f_n qui est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}+$; comme $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, $x_n \in [0, 1]$.

2. Monotonie de la suite, c'est classique, on commence à observer que sur $[0,1]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.
   Alors $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n + (x_n^n + x_n - 1)$.
   On a donc $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Comme f_{n+1} croît sur $[0,1]$, $x_n \leq x_{n+1}$. La suite, croissante et majorée, converge. Sa limite ℓ appartient à $]0,1]$.
   Raisonnons par l'absurde, si $\ell < 1$, comme $x_n^n + x_n - 1 = 0$, par passage à la limite, $\ell - 1 = 0$. Contradiction. Pourquoi ai-je supposé $\ell < 1$?
3. Posons $y_n = 1 - x_n$, et remplaçons dans l'équation, on obtient : $(1-y_n)^n - y_n = 0$;
   Cela s'écrit encore $e^{n\ln(1-y_n)-\ln y_n} = 1$ ou $\phi(y_n) = n\ln(1-y_n) - \ln y_n = 0$.
   Venons en à l'étude de ϕ : ϕ est strictement décroissante et réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. Calculons (estimons) ϕ en les valeurs suggérées, soit avec nos petites mains, soit avec MAPLE :

```
>restart;
>phi:=y->n*ln(1-y)-ln(y);
```

$$y \mapsto n\ln(1-y) - \ln(y)$$

```
>series(phi(ln(n)/(2*n) ),n=infinity);
```

$$1/2\ \ln(n) - \ln(1/2\ \ln(n)) - 1/8\,\frac{(\ln(n))^2}{n} - 1/24\,\frac{(\ln(n))^3}{n^2} - \frac{1}{64}\,\frac{(\ln(n))^4}{n^3} - \frac{1}{160}\,\frac{(\ln(n))^5}{n^4} + O\left(n^{-5}\right)$$

```
> series(phi(ln(n)/n),n=infinity);
```

$$-\ln(\ln(n)) - 1/2\,\frac{(\ln(n))^2}{n} - 1/3\,\frac{(\ln(n))^3}{n^2} - 1/4\,\frac{(\ln(n))^4}{n^3} - 1/5\,\frac{(\ln(n))^5}{n^4} + O\left(n^{-5}\right)$$

   Ainsi, à partir d'un certain rang, nous avons

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq \frac{\ln(n)}{n}. \tag{14.16}$$

4. Cet encadrement nous donne $\ln y_n \sim -\ln n$, un retour à $y_n = (1-y_n)^n$ ou $\ln y_n = n\ln(1-y_n) \sim -ny_n$ et le tour est joué...

14.101 Indication ou corrigé *5.11*

• Méthode 1 : Intégrale d'une fonction bornée

Dérivabilité en 0.

On posera $\phi(t) = \dfrac{f(t)-f(0)}{t}$. En dérivant, il vient :

$$\phi'(t) = \frac{tf'(t) - (f(t)-f(0))}{t^2}$$

Cette dernière fonction est définie et continue sur $]0,1]$, bornée sur un voisinage de 0 (car c'est un O(1) en 0) elle est donc bornée sur $]0,1]$ (à démontrer en détails).
Une fonction continue et bornée sur $]0,1]$ est intégrable sur cet intervalle ($|u| \leq M$, M intégrable sur un intervalle borné).. On observe alors que

$$\lim_0 \phi(t) = \lim_0 \left(\phi(1) + \int_0^t \phi'(s)\,ds\right) = \phi(1) + \int_0^1 \phi'(s)\,ds.$$

Comme le taux de variation de f admet une limite en 0, f y est dérivable.

Continuité de la dérivée en 0.
Revenons à notre relation initiale :

$$tf'(t) - f(t) + f(0) \underset{x\to 0}{=} O(t^2),$$

divisons

$$f'(t) = \underset{t\to 0}{=} \frac{f(t) - f(0)}{t} + O(t)$$

par passage à la limite : $\lim f'(t) = f'(0)$ ce qui est la continuité de f' en 0... Le reste suit.

• Méthode 2 : Fonctions lipschitziennes
On commence par observer que $tf'(t) - f(t) + f(0)$ est le numérateur de $\dfrac{d}{dt}\dfrac{f(t) - f(0)}{t}$.
On pose $\phi(t) = \dfrac{(f(t) - f(0))}{t}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et vérifie

$$\phi'(t) = \frac{tf'(t) - (f(t) - f(0))}{t^2} \underset{t\to 0}{=} = O(1)$$

Cette dérivée est alors bornée sur $]0,1]$. ϕ est donc lipschtzienne sur $]0,1]$. D'après l'exercice **??**, elle admet un ppc en 0, ce qui prouve que f est dérivable en 0.
Il reste à vérifier que la dérivée de f est continue en 0 : on divise la relation de l'énoncé par t ce qui donne :

$$f'(t) - \frac{(f(t) - f(0))}{t} \underset{t\to 0}{=} = O(t)$$

$$f'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{(f(t) - f(0))}{t} + O(t)$$

d'où $\lim f'(t) = f'(0)$.

14.5 Indications ou corrigés des exercices, séries numériques

14.102 Indications ou corrigé *ex. 6.4*

Comme $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1\right)$ est non nul pour $n \geq 2$, et a pour limite 0 en $+\infty$, la série est grossièrement divergente lorsque $\alpha \leq 0$.

Étudions le cas $\alpha > 0$: un DL de

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1 = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

nous donne

— $u_n > 0$

— $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\alpha}$; On reconnaît une série de Bertrand et on l'étudie [14] en

- — comparant à une série de Riemann convergente si $\alpha > 1$:

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\alpha} = o(\frac{1}{n^\alpha});$$

- — comparant à l'intégrale de $\dfrac{1}{t \ln t}$ lorsque $\alpha = 1$; [15]
- — enfin, pour le cas $0 < \alpha < 1$, observer que

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\alpha} = o(\frac{1}{n^\beta}),$$

pour tout β strictement compris entre α et 1.

□

14.103 Indications ou corrigé ex *6.5.*

1. L'étude de $\sum u_n$ est très classique. A savoir faire, voir le cours sur les intégrales semi-convergentes.
   Résumons l'étude. La série $\sum u_n$ satisfait au critère spécial sur les séries alternées :
   — le signe de u_n est celui de la fonction sin sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, à savoir : $(-1)^n$. La suite est bien alternée.
   — $|u_n| \leq \int_{I_n} 1/x \; dx = \pi/n$.
   — La suite des valeurs absolues est enfin décroissante :

$$|u_n| - |u_{n+1}| = (-1)^n \left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \; dx - \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin x}{x} \; dx \right)$$

Un changement de variables nous conduit à une seule intégrale dont le signe est celui de la fonction sin sur $[n\pi, (n+1)\pi]$:

$$|u_n| - |u_{n+1}| = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi}\right) \; dx.$$

les sommes partielles de la série $\sum v_n$ sont des intégrales d'une fonction intégrable positive.

14. impératif, ce n'est pas du cours !
15. pour intégrer, si vous n'y arrivez pas, allez chercher un élève de sup, s'il n'y arrive pas, un élève de terminale, sinon allez au diable !

2. Comparons les sommes partielles des deux séries :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} v_n = \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

Une intégration par parties donne :

$$S_N = \left[\frac{-\sin^2 x}{x}\right]_0^{(N+1)\pi} + \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin(2x)}{x}\, dx.$$

La partie tout intégrée est nulle, en posant $u = 2x$ dans la deuxième intégrale, on obtient

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} v_n = T_{2N+2} = \sum_{n=0}^{2N+2} v_n.$$

Le tour est joué, les deux séries qui convergent ont la même limite.

□

14.104 Indications ou corrigé ex *6.6*

Pas de difficulté si on regarde les sommes partielles en regroupant les termes 5 à 5. Commençons par une somme d'indice multiple de 5.

$$\begin{aligned} S_{5P} = \sum_{n=1}^{5P} u_n &= \sum_{p=0}^{P-1} (u_{5p+1} + u_{5p+2} + u_{5p+3} + u_{5p+4} + u_{5p+5}) \\ &= \sum_{p=0}^{P-1} \left(\frac{1}{5p+1} + \frac{1}{5p+2} + \frac{1}{5p+3} + \frac{1}{5p+4} - \frac{4}{5p+5}\right) \end{aligned}$$

A partir de là tout devient évident, on regroupe chaque terme de la somme en 4 différences :

$$S_{5P} = \sum_{p=0}^{P-1} \left(\frac{5-1}{(5p+1)(5p+5)} \frac{5-2}{(5p+2)(5p+5)} + \frac{5-3}{(5p+3)(5p+5)} + \frac{5-4}{(5p+4)(5p+5)}\right).$$

C'est là la somme de 4 séries à termes positifs équivalents à $\dfrac{5-i}{25p^2}$.

Question pour finir : on a étudié les sommes partielles de la forme S_{5P}, pourquoi les autres auraient elles la même limite ?

Une meilleure idée, avec le calcul de la somme ; solution Luc Momal-2009 : on ajoute et on retranche.

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{p=1}^{[N/5]} \frac{1}{5p}\right) + \sum_{p=1}^{[N/5]} \frac{-4}{5p}.$$

Cela s'exprime encore

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{p=1}^{[N/5]} \frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{[N/5]+1} \frac{1}{n}.$$

On compare alors cette dernière somme à une intégrale :

$$\int_{[N/5]+1}^{N+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{[N/5]+1}^{N} \frac{1}{n} \leq \int_{[N/5]}^{N} \frac{dt}{t},$$

et après calcul tout cela est équivalent à $\ln 5$.

□

14.105 Indications ou corrigé ex *6.7*
Il est immédiat que,

$$0 < u_n \leq \int_0^{1/n^r} dx \leq 1/n^r,$$

et si $r > 1$, la convergence de la série est établie par comparaison avec une série de Riemann convergente. L'exercice commence donc lorsque l'on étudie la série pour $0 < r \leq 1$, ce qui demande de regarder de plus près.

— c'est une série à termes positifs,
— on sait que

$$\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x,$$

— considérons $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un rang n_0 au delà duquel

$$(1 - \varepsilon)x \leq \sin x \leq (1 + \varepsilon)x,$$

$$(1 - \varepsilon) \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_0^{1/n^r} \leq \int_0^{1/n^r} \sin x \; dx \leq (1 + \varepsilon) \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_0^{1/n^r}.$$

La série $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^{r(r+1)}}$. Elle converge donc ssi $r^2 + r - 1 > 0$ soit $r \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Joli n'est-ce pas ?

□

14.106 Indications ou corrigé ex *6.8*
Exercice sans mystère, on observe tout d'abord que l'intégrale a un sens, la fonction $\frac{1}{\sqrt[6]{x^7+1}}$ est positive, équivalente en $+\infty$, à $\frac{1}{x^{7/6}}$. C'est donc une fonction intégrable.

Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un rang n_0, à partir duquel

$$(1 - \varepsilon) \frac{1}{x^{7/6}} \leq \frac{1}{\sqrt[6]{x^7+1}} \leq (1 + \varepsilon) \frac{1}{x^{7/6}}.$$

En intégrant, on obtient

$$(1 - \varepsilon) \frac{1/6}{n^{\alpha+1/6}} \leq u_n \leq (1 + \varepsilon) \frac{1/6}{n^{\alpha+1/6}}$$

et la série converge ssi $\alpha > 5/6$.

□

14.107 Indications ou corrigé ex *6.9.*

1. **Réponse rapide :**
   • lorsque $(u_n)_n$ a pour limite 0, $\lim u_n = 0$ et $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et ce sont deux séries à termes positifs, équivalents. Elles sont de même nature.
   • Si ce n'est pas le cas, les deux séries divergent grossièrement. Elles sont encore de même nature.

   Autre réponse (préférable par précaution, si vous êtes moins à l'aise) :
   $\Rightarrow$ si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$ et $\ln(1 + u_n) \sim u_n$...
   $\Leftarrow$ si $\sum \ln(1 + u_n)$ converge, alors $\lim u_n = 0$ et $\ln(1 + u_n) \sim u_n$...

2.

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right)=\sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k),$$

le produit a une limite finie ssi les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ convergent ;

3. Quelques observations :

(a) Nous avons

$$v_n=\frac{u_k}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}\leq u_n;$$

Si la série $\sum u_n$ converge, il en va de même pour la série $\sum v_n$.

(b) un contre-exemple évident à la réciproque : $u_n=n, v_n\sim 1/n!$, qui est donc fausse ;

(c) on écrit v_n sous la forme

$$v_n=\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)}-\frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)},$$

et la somme s'écrit

$$\sum_{n\geq 0}v_n=v_0+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)}-\frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}\right)=1-\frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}.$$

Comme $u_n>0$, le produit admet toujours une limite (réelle ou infinie) est la série $\sum v_n$ converge dans tous les cas.

□

14.108 Indications ou corrigé ex *6.10*

1. De la relation

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=-\infty$$

nous déduisons qu'il existe un réel $A>0$ à partir duquel $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\leq -1$ et donc que $f'(x)\leq 0$ et $f\searrow$ sur $[A,+\infty[$. En particulier, pour $x\geq A$:

$$\int_1^x\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt\leq-\int_1^x dt \text{ et } \ln\left|\frac{f(x)}{f(A)}\right|\leq -x+A$$

ce qui donne, $\boxed{\text{pour } x\geq A:\ f(x)\leq f(A)e^{1-x}.}$

On a donc à partir d'un certain rang, une majoration $f(n)\leq Cste\times e^{-n}$ et la série à termes positifs $\sum f(n)$ converge par comparaison à une série géométrique.

2. Nous allons montrer que la somme $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}f(k)$ est équivalente à son premier terme ou, ce qui revient au même, montrer que

$$\sum_{k=n+2}^{\infty}f(k)\underset{n\to+\infty}{=}o(f(n+1)).$$

Remarquons que pour tout $\alpha>0$, il existe $A_\alpha>0$ tel que pour $x\geq A_\alpha$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\leq-\alpha$ et en intégrant entre $n+1\geq A_\alpha$ et $n+k$, il vient

$$\ln\left|\frac{f(n+k)}{f(n+1)}\right|\leq-\alpha((n+k)-(n+1))$$

puis

$$f(n+k) \leq f(n+1)e^{-\alpha(k-1)}.$$

Revenons au reste d'ordre n :

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} f(k) = \sum_{k=2}^{\infty} f(n+k) \leq \sum_{k=2}^{\infty} f(n+1)e^{-\alpha(k-1)} = f(n+1)\frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}.$$

En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$
- il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} \leq \frac{e^{-\alpha_0}}{1-e^{-\alpha_0}} \leq \varepsilon;$$

- il existe A_{α_0} tel que

$$n \geq A_{\alpha_0} \Rightarrow \frac{\sum_{k=2}^{\infty} f(n+k)}{f(n+1)} \leq \frac{e^{-\alpha_0}}{1-e^{-\alpha_0}} \leq \varepsilon.$$

On a bien prouvé que $\boxed{R_n = f(n+1) + o(f(n+1)) \sim f(n+1).}$

□

14.109 Indications ou corrigé ex *6.11*

1. faire apparaître une intégrale en tenant compte de l'indication :

$$\frac{(-1)^n}{3^n(2n+3)} = \frac{(-1)^n}{3^n}\int_0^1 x^{2n+2}\ dx;$$

on étudie alors la série de fonctions :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n}x^{2n+2} = x^2\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-x^2}{3}\right)^n = \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{3}}.$$

Cette série est normalement convergente sur $[0,1]$:

$$||u_n||_\infty = \underset{x\in[0,1]}{sup}\left|\frac{-x^2}{3}\right|^{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}.$$

On en déduit donc (voir le théorème sur l'intégration d'une limite uniforme en 10.5 ou en **??**), la convergence de la série des intégrales et la valeur de sa somme :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n}x^{2n+2} = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 \frac{(-1)^n}{3^n}x^{2n+2}\ dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{3}}\ dx.$$

Calculons cette intégrale :

— décomposons $\dfrac{x^2}{1+\frac{x^2}{3}} = 3 - \dfrac{9}{3+x^2}$;

— on intègre :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{3}}\ dx = \left[3\,x - 3\,\sqrt{3}\arctan(1/3\,x\sqrt{3})\right]_0^1;$$

D'où, enfin

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n} x^{2n+2} = 3 - 3\sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 3 - \sqrt{3}\frac{\pi}{2}.$$

2. série $\sum \dfrac{1}{3^n(3n+2)}$: étude analogue ;
3. série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(3n+1)}$: on introduit de la même façon une série d'intégrales

$$\frac{(-1)^n}{(3n+1)} = (-1)^n \int_0^1 x^{3n}\ dx,$$

et on étudie la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{3n}.$$

— cette série converge simplement sur l'intervalle $[0,1[$:

$$\forall x \in [0,1[\ \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}.$$

— la suite des sommes partielles est dominée par une fonction ϕ intégrable sur $[0,1[$:

$$\forall x \in [0,1[\ \left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{3n}\right| = \left|\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}\right| \leq \frac{2}{1+x^3} = \phi(x).$$

On en déduit, avec le théorème de convergence dominée (voir 11.2), que la limite est intégrable (évident par ailleurs), que la série des intégrales converge et que :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 (-x^3)^n\ dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\ dt.$$

On calcule cette intégrale en observant que

$$\frac{1}{1+x^3} = 1/3\ (x+1)^{-1} - 1/3\ \frac{-2+x}{x^2-x+1}...$$

Un petit entraînement à la décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\
&= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{(x^2-x+1)} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{6}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{-3}{3/4\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1/2)\right)^2\right)}\right)
\end{aligned}$$

Une intégration donne enfin

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\ dx = \left[\frac{\ln(1+x)}{3} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + 1/\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1/2)\right)\right]_0^1$$

4. développement limité du terme en ln : $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{(3n+1)^\alpha}\right)$.

□

14.110 Indications ou corrigé *6.12*

1. On observe que
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+(n-k)^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right),$$
où g est la fonction définie par $g(x)=\frac{1}{x^2+(1-x)^2}$. On reconnaît une somme de Riemann associée à cette fonction et on a
$$u_n \sim \frac{1}{n^{1+\alpha}}\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\pi}{2n^{1+\alpha}}.$$
2. sans commentaire

□

14.111 Indication ou corrigé *6.13*

1.
2.
3.

14.112 Indication ou corrigé *6.14*

1. L'idée est d'étudier un DA du terme général :
$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(n\pi\sqrt{1+1/n^2})=\sin(n\pi(1+w_n))=(-1)^n\sin(n\pi w_n)$$
avec $w_n=\sqrt{1+1/n^2}-1=1/2n^2+O(1/n^4)$.
Comme $\sin x =_{x\to 0} x+O(x^3)$, il vient :
$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n(w_n+O(w_n))=\frac{(-1)^n\pi}{2n}+O(1/n^3),$$
en quoi nous reconnaissons la somme d'une série alternée vérifiant le CSSA et d'une série absolument convergente.
2. Une série de terme général positif u_n telle que
$$\sum_{k=n+1}^{2n}u_k\leq\sum_{k=1}^{n}u_k$$
et qui ne converge pas : $u_k=1$. L'énoncé est donc faux ; comment le rétablir (c'est une erreur de transcription de l'OT, mais laquelle ?)
3. Si $\sum u_n$ converge, le tg a pour limite 0 et $\sum\frac{1}{1+u_n^2}$ est grossièrement divergente ; la réciproque de $\sum u_n CV \Rightarrow \sum v_n DV$ est fausse (prendre une suite $(u_n)_n$ constante).

4. On commence par étudier le cas particulier $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$: on a alors $v_n = \dfrac{1}{1+n^{2-\alpha}}$.
   - lorsque $\alpha > 2$, $v_n \sim 1$ et $\sum v_n$ diverge grossièrement ;
   - lorsque $\alpha = 2$, $v_n \dfrac{1}{2}$ et $\sum v_n$ diverge grossièrement ;
   - lorsque $\alpha < 2$, $v_n \sim \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ et $\sum v_n$ converge ssi $2-\alpha > 1$ ou $\alpha < 1$... diverge grossièrement ;

   Le tableau qui suit donne un bilan :

α	$\alpha \geq 2$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 1$	$\alpha < 1$
$\sum u_n$	converge	converge	diverge	diverge
$\sum v_n$	diverge	diverge	diverge	converge

   La seule conjecture possible est alors $\sum u_n conv \Rightarrow \sum v_n div.$

5. (a) Pour $\sum u_n$, envisager les cas $p < 0, p = 0$ et $p > 0$, rechercher un équivalent du terme général qui assure de la divergence grossière...Etait-ce vraiment la question ?

   (b) Etude de $\sum 1/u_n = \sum \dfrac{1}{\ln n + (-1)^n n^p}$:
   - si $p \leq 0$, série à t. positifs à partir d'un certain rang et $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{\ln n}$, divergente (séries de Bertrand)
   - si $p > 0$, nous écrirons

   $$\frac{1}{u_n} = \frac{(-1)^n}{n^p} \frac{1}{1+(-1)^n \dfrac{\ln n}{n^p}} = \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1 + (-1)^n \frac{\ln n}{n^p} + o\left(\frac{\ln n}{n^p}\right)\right)$$

   Nous écrirons cela
   $$\frac{1}{u_n} = \frac{(-1)^n}{n^p} - w_n$$
   où $w_n \sim \dfrac{\ln n}{n^{2p}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang... Les reste est immédiat : il y a convergence ssi $2p > 1$.

6. $\sum \dfrac{\cos \ln n}{n}$?

   Une idée : infirmons le critère de Cauchy ;

   Une autre idée : comparons à l'intégrale $\int \dfrac{\cos \ln t}{t}\, dt$,... résultat classique du cours (voir détails de la méthode dans l'exercice suivant). f' est intégrable sur $[1, \infty[$, l'intégrale de f diverge (changement de variable $u = e^t$...)

14.113 Indication ou corrigé *6.15*

1. Abslt. convergente, trivial ;
2. $u_n - v_n = \int_n^{n+1}(f(n) - f(t))\, dt$ où $f(t) = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$. On intègre par parties, en faisant $1 = (t-(n+1))'$ de façon à tuer la partie toute intégrée... La condition sur α apparaît.
3. on comparera, une fois le DA obtenu, u_n à une série télescopique...

14.114 Indication ou corrigé *6.16* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Pas de problème pour l'étude des convergences des séries $\sum f(n)$ et $\sum (-1)^n f(n)$. En effet la seconde vérifie le critère des séries alternées (étude flash de f qui est positive et décroît

sur $[e,+\infty[$). La première série quant à elle, est une série à termes positifs pour laquelle on peut établir les encadrements :

$$\int_2 f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t)\,dt,$$

$$\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_2^{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^{n}.$$

Un équivalent de S_n est donc $\dfrac{\ln^2 n}{2}$.

Etude numérique :

```
restart;
f:=x->ln(x)/x:

S:=proc(f,n)
local s, s1, k;

s:=0;
s1:=0;
for k from 1 to n do
    s:=evalf(s+f(k));
    s1:=evalf(s1+(-1)^k*f(k));
od;
s,evalf(2*s/ln(n)^2),s1;
end:

S(f,10);
S(f,100);
S(f,1000);
S(f,43000);
```

```
 2.692177367, 1.015552284,  0.2717475537
10.55397618,  0.9953016787, 0.1828046287
23.78917920,  0.9970927686, 0.1633213039
56.84061262,  0.9987227599, 0.1599929577
```

2. Exprimons la différence comme une intégrale, classiquement :

$$w_n = f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = \int_{n-1}^{n} (f(n) - f(t))\,dt.$$

C'est là que l'on intègre judicieusement par parties :

$$w_n = [(t-(n-1))(f(n)-f(t))]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} (t-(n-1)) \times [f(n)-f(t)]'\,dt$$

On obtient donc, la partie toute intégrée étant nulle,

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} 1 \times |f'(t)|\,dt = \int_{n-1}^{n} \left|\frac{1-\ln t}{t^2}\right| dt.$$

On montre alors sans peine que c'est là le terme général d'une série absolument convergente puisque $\left|\dfrac{1-\ln t}{t^2}\right| \leq \dfrac{\ln t}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$ sur un voisinage de $+\infty$.

3. Nous allons calculer de deux façons :

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k) = 2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{n}(f(2k) + f(2k-1))$$

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k) = \sum_{k=1}^{n}(f(2k) - f(2k-1)) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f(k).$$

Reprenons alors

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln k}{k} + \frac{\ln 2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + H_n \ln 2...$$

Enfin

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f(k) = 2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k) = H_n \ln 2 - \sum_{k=n+1}^{2n} f(k)$$

$$= H_n \ln 2 - \int_n^{2n} f(t)\,dt + (W_{2n} - W_n) = (\ln n + \gamma + o(1))\ln 2 + \frac{1}{2}[\ln^2 t]_n^{2n} + o(1)...$$

$$\boxed{\textstyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f(k) = \gamma \ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln^2 2.}$$

14.6 Indications ou corrigés des exercices, espaces normés et topologie

14.115 Indications ou corrigé ex *7.1*

1. écrire $det(A) = \sum \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} ... a_{n,\sigma(n)}$; c'est un polynôme en les $a_{i,j}$, composantes de A.
2. image réciproque d'un ouvert par une fonction continue ;
3. est un fermé car c'est l'image réciproque de I_n par la fonction continue
$$M \to^t M\ M$$
d'un normé dans lui-même, c'est d'autre part un ensemble borné parce que pour la norme euclidienne $\sqrt{Tr(^tM\ M)}$, c'est un ensemble borné. En effet pour une matrice orthogonale,
$$\sqrt{Tr(^tM\ M)} = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n.$$
4. Pensons à la caractérisation séquentielle des fermés. Soit F sev de dimension finie de $(E, \mathcal{N})$, de base $(e_1, ..., e_d)$. Si une suite $(X_n)_n$ d'éléments
$$X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)} e_i,$$
de F converge dans E vers une limite $Y \in E$. C'est une suite BORNEE pour la norme $\mathcal{N}$ dont la restriction est aussi une norme sur F. Elle admet donc une valeur d'adhérence X dans F (propriété de Bolzano-Weierstrass dans les evn). Cette valeur d'adhérence est aussi une valeur d'adhérence dans E pour la norme de $\mathcal{N}$ sur E.
Mais comme la suite converge dans E elle n'y admet qu'une seule valeur d'adhérence qui est $X = Y$.
5. Si $B(a, r) \subset F$, qui est stable par soustraction, alors $a \in F$ et
$$B(0, r) = \{x - a; x \in B(a, r)\} \subset F.$$
Considérons $x \in E$, l'élément $\dfrac{a}{2||x||}x$ est dans cette boule, donc dans F. Par stabilité pour la multiplication externe, $x \in F$.
6. **Cas d'une droite :** On suppose F fermé de E et on considère une droite D de E.
Deux cas se présentent :
   - soit $D \cap F = \{0\}$ et $F + D = F \oplus D$;
   - soit il existe $u \neq 0$ tel que $u \in D \cap F$. Dans ce dernier cas, $D = vec(u) \subset D$ et in n'y a rien à montrer.

   On suppose $D \not\subseteq F$, et on considère une suite convergente $(x_n)_n$ d'éléments de $F \oplus D$. On note pout tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (f_n + d_n)$ avec d'évidentes notations.

   On considère à nouveau deux cas :
   - On suppose tout d'abord $(f_n)_n$ bornée. Comme $(x_n)_n$ converge elle est bornée de même que $(d_n)_n$. Comme il s'agit d'une suite d'éléments de D de dimension finie, elle admet une sous-suite $(d_{n_p})_p$ qui converge dans D.
   On écrit $x_{n_p} = f_{n_p} + d_{n_p}$. Deux suites convergent la troisième aussi. Comme F est fermé $\lim f_{n_p} = \lim x_{n_p} - \lim d_{n_p} \in F$. On a donc
$$x = \lim x_n = \lim x_{n_p} = \lim f_{n_p} + \lim d_{n_p} = f - d \in F \oplus D.$$

— Si $(f_n)_n$ n'est pas bornée, on écrit

$$\frac{x_n}{||f_n||} = \frac{f_n}{||f_n||} + \frac{d_n}{||f_n||}$$

On se retrouve dans le cas précédent puisque la suite de terme général $x'_n = \dfrac{x_n}{||f_n||}$ converge (vers 0). Sa limite est un élément de $F \oplus D$ qui est de la forme $f + d = 0 + 0$ où $f = 0$ est, comme vu précédemment, limite d'une suite extraite de $\dfrac{f_n}{||f_n||}$. C'est contradictoire car ces éléments sont de norme 1.

Le seul cas possible conduit à $\lim x_n \in F \oplus D$ cqfd.

□

14.116 Indications ou corrigé ex *7.2*

1.
2.

□

14.117 Indication ou corrigé *7.3*

La linéarité est évidente ; il suffit alors de prouver qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\sup_{u \neq 0} \frac{|L(u)|}{||u||_\infty} \leq K.$$

A l'évidence $K = 1$ fait l'affaire.

14.118 *Corrigé de l'exercice 7.4*

$$\phi(u) = \int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^1 f(t)\, dt.$$

1. ϕ est linéaire, il suffit de montrer qu'il existe $M > 0$ tq pour toute fonction $u \in C$, $|\phi(u)| \leq M||u||_\infty$. Or,

$$|\phi(f)| \leq \left| \int_0^{1/2} f(t)\, dt \right| + \left| \int_{1/2}^1 f(t)\, dt \right| \tag{14.17}$$

$$\leq \left| \int_0^{1/2} |f(t)|\, dt \right| + \left| \int_{1/2}^1 |f(t)[\, dt \right| \tag{14.18}$$

$$\leq \int_0^1 |f| \leq \int_0^1 ||f||_\infty = ||f||_\infty \tag{14.19}$$

2. Supposons qu'il existe une fonction $f \in C$, telle que $|\phi(f)| = ||f||_\infty$
   Comme :

$$\int_0^{1/2} |f(t)|\, dt \leq \frac{1}{2}||f||_\infty, \quad \int_{1/2}^1 |f(t)|\, dt \leq \frac{1}{2}||f||_\infty$$

   la valeur absolue de la différence ne peut être égale à $||f||_\infty$ que dans le cas où une des intégrales est $1/2||f||_\infty$ l'autre $-1/2||f||_\infty$.

Supposons que
$$\int_0^{1/2} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2}||f||_\infty.$$
Cela donne
$$\int_0^{1/2} (f(t) - ||f||_\infty)\, dt = 0$$
et comme la fonction $f - ||f||_\infty$ **est continue et de signe constant,** elle est nulle, ce qui prouve que f est constante sur $[0, 1/2]$ et donc aussi sur $[1/2, 1]$ (même démonstration) et elle prend des valeurs opposées sur ces intervalles. Elle ne peut donc être continue en $1/2$ car elle est par hypothèse non nulle. La contradiction est là.

3. On adapte légèrement le raisonnement qui précède.
   On observe pour cela que si $|a| \leq 1/2$ et $|b| \leq 1/2$ et $|a-b| = 1$, on a $\boxed{a = -b \text{ et } |a| = |b| = 1/2.}$
   En effet, écrivons, $a = \rho e^{i\alpha}$ et $b = \rho' e^{i\beta}$.
   Si $|a - b| = 1$, il vient :
   $1 = |a - b| \leq |a| + |b| = \rho + \rho' \leq 1$, donc $\rho + \rho' = 1$ et $\boxed{|a| = \rho = |b| = \rho' = 1/2.}$
   Ainsi, $2|a - b| = \left|e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right| = \left|e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{i(\beta-\alpha)/2}\right| = 2|\sin(\beta - \alpha)/2| = 2...$

14.119 *Corrigé de l'exercice 7.5.*

1. Question non posée : faites un dessin pour chaque définition, chaque question.
2. Soit $\delta = \sup_{(x,y)\in E^2} ||x - y||$, le diamètre de A.
   Il s'agit de montrer que « ce sup est atteint », on voit bien où la compacité intervient. Considérons la fonction $D : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $D(x, y) = ||x - y||$; D est continue et atteint un maximum sur $A \times A$ qui est un compact de $E \times E$. Donc il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $||a - b|| = \delta$.
   Questions : quelle norme sur $E\times E$, pourquoi $A\times A$ est il compact ? La dimension joue-t-elle ici ?
3. Soient H et H' hyperplans tels que $H \cap A \neq \emptyset$ et $H' \cap A \neq \emptyset$. Soient donc $x \in H \cap A$ et $y \in H' \cap A$. On a $d(H, H') \leq ||x - y|| \leq \delta$.
4. Soit $B = B^\circ(\Omega, r)$ une boule ouverte de E ne contenant pas 0. On a $||\Omega|| \geq r$, puisque cette boule ouverte ne contient pas 0.
   Commençons par observer que si H est un hyperplan ne rencontrant pas B, une telle application est facile à construire. Considérons, en effet, une base de E de la forme $(a, e_2, ..., e_n)$ où $(e_2, ..., e_n)$ est une base de H, et u la forme linéaire telle que $\phi(a) = 1$ et $\phi(e_i) = 0$. Nous avons donc $u(a) > 0$ et $u(x) = 0$ ssi $x \in H$. **Comme** B **est convexe,** $u(B)$ est un convexe donc un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient $u(a) = 1$ et ne contient pas 0... Donc $u(>) \subset]0, +\infty[$.

   Pour construire un hyperplan ne rencontrant pas B, on choisit un hyperplan H_0 quelconque supplémentaire de $vect(\Omega)$. S(il ne rencontre pas B, c'est fini. Sinon on considère
5. Monter qu'il existe deux hyperplans d'appui de A, H et H' passant respectivement par a et par b. Montrer que $d(H, H') = \delta$.

14.120 Indication ou corrigé *7.6*

1.
2.

14.121 Indication ou corrigé *7.7*

1. Écrivons $P(X)=\prod(X-\alpha_i)$. Il vient immédiatement
$$|P(x+iy)|^2=\prod_{i=1}^{n}\left((x-\alpha_i)^2+y^2\right).$$
2. C'est évident en raisonnant par l'absurde, si P admet une racine non réelle il ne peut satisfaire la relation de l'énoncé. On obtient donc une caractérisation des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$.
3. Les polynômes caractéristiques $\chi_{A_n}(X)$ sont scindés sur $\mathbb{R}$ puisque chaque matrice A_n est trigonalisable dans $\mathcal{M}_N(_R)$. Ils vérifient donc la relation $|\chi_{A_n}(z)|\geq|Imz|^n$. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, l'application $M\in\mathcal{M}_N(_R)\to\det(M-xI_N)\in\mathbb{C}$, est continue. Par passage à la limite, on a
$$\lim|\chi_{A_n}(z)|=|\chi_A(z)|\geq|Imz|^n.$$
Cela montre (réciproque ci-dessus) que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_N(_R)$.
Une limite des matrices trigonalisables est donc elle-même trigonalisable.
4. Contre-exemple : $A_n=\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a+1/n\end{bmatrix}$;
5. Considérons une suite de matrices de $\mathcal{M}_N(_R)$ semblables à une même matrice A et de limite A'. Comme $M\in\mathcal{M}_N(_R)\to\det(M-xI_N)\in\mathbb{C}$, est continue,
$$\lim_n\chi_{A_n}(z)=\lim_n\det(A_n-zI_N)=\det(A'-zI_N)=\chi_{A'}(z).$$
• Si A est diagonalisable, le polynôme minimal de A est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples. Comme par ailleurs $\pi_A(A_n)=0$, par passage à la limite, $\lim\pi_A(A_n)=\pi_A(A')$, A' est diagonalisable.
Ainsi, A et A' sont diagonalisables et ont le même polynôme caractéristique. Elles sont donc semblables dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
• Si A n'est pas diagonalisable, le résultat devient faux. Les matrices $A_n=\begin{bmatrix}1 & 1/n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ sont semblables à $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ alors que la limite est I_2.

14.122 Indication ou corrigé *7.8*

1. (a) On vérifie rapidement que $f^N=-id_E$. Le polynôme X^n+1 est un polynôme annulateur de f. C'est aussi le polynôme caractéristique puisque E est de dimension N. Le coefficient de X^{n-1}, est égal à la trace de f, qui est donc nulle.
Par ailleurs le polynôme caractéristique a une racine au plus dans $\mathbb{R}$ (-1 lorsque N est impair), et $f\neq-id$.
   (b) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite d'endomorphismes diagonalisables sur $\mathbb{R}$, $(a_n)_n$, de limite f.
Cette suite est bornée (notons A un majorant). Pour tout n, et toute val.ppre.réelle $\lambda_n^{(j)}$ de a_n, il existe un vecteur unitaire, $x_n^{(j)}$ tel que :
$$a_n(x_n)=\lambda_nx_n.$$
Notons $\lambda_n^{(1)},...,\lambda_n^{(N)}$ une suite des v.p. de (a_n). Comme $|\lambda_n|\leq|||a_n|||\leq A$, on peut trouver une suite d'indices $(n_p)_p$ telle que les 2 N suites extraites $(\lambda_{n_p}^{(j)})$ et $(x_{n_p}^{(j)})$ soient

convergentes.
Il vient alors à la limite : $f(x^{(j)}) = \lambda^{(j)}x^{(j)}$ et $\lambda^{(j)}$ étant réel, il est égal à -1.
Cela montre que N est impair.
Les traces des a_{n_p} sont les sommes $\sum_{j=1}^{N} \lambda_{n_p}^{(j)}$, de limite $-N$, contradiction.

2.

14.123 Indications ou corrigé 7.9

1. immédiat ; penser à justifier $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ par la continuité et la positivité de $|f'|$, comme d'hab !
2. Penser que $f(t) = f(0) + \int_0^t f('u)\, du$... On en déduit que

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\, dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt = N(f).$$

On a donc $||\ ||_\infty \leq N$. Se pose alors la question de la réciproque : existe-t-il α tel que $N \leq \alpha||\ ||_\infty$?
Pour montrer que cela n'est pas possible, il suffit de mettre en évidence une suite (f_n) qui converge vers 0 pour $||\ ||_\infty$ mais pas pour N. Prenons pour cela

$$f_n : x \rightarrow \frac{\sin(n\pi x)}{n}.$$

14.124 Indication ou corrigé *7.10*

1. Normons $\mathbb{R}^n$ avec une norme quelconque puis $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec la norme subordonnée. La compacité de V et C ne dépend pas du choix de ces normes puisque les deux espaces sont de dimensions finies. V contient une boule fermée $B(0, r)$; considérons alors $f \in C$, l'image par f de cette boule est dans V qui est borné (par m). Alors :

$$|||f||| = \sup_{||x||=1} ||f(x)|| = \sup_{||x||=r} \frac{||f(x)||}{||x||} \leq \frac{m}{r}.$$

Cela prouve que C est borné.
Est-il fermé ? considérons une suite $(f_n)_n$ d'éléments de C qui converge vers $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Soit alors $x \in V$, pour chaque indice n, $f_n(x) = x_n \in V$.

$$||x_n - f(x)||||(f - f_n)(x)|| \leq |||f - f_n|||\ ||x||$$

a pour limite 0, donc $(x_n)_n$ suite d'éléments de V converge et sa limite $f(x)$, appartient à V. Cela montre que $f(V) \subset V$.
2. **Pour ce qui est du déterminant, regardons les valeurs propres**
• si f admet une valeur propre réelle λ, associé au vecteur propre x, il existe $r > 0$ tel que $rx \in V$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(rx) = r\lambda^n x \in V$. Comme V est borné et $x \neq 0$, cela impose $|\lambda| \leq 1$. **Le sort des endomorphismes f trigonalisables sur $\mathbb{R}$ est par là même réglé.**

• Que se passe-t-il dans le cas général ?
Notons A la matrice de f dans la base canonique. Si $\lambda\alpha + i\beta$ est une valeur propre complexe de A il existe un vecteur propre $ZX + iY \in \mathbb{C}^n$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
Comme $AZ = \lambda Z$, on a $AZ = AX + iAY = (\alpha X - \beta Y) + i(\alpha Y + \beta X)$ et le plan $P = vect(X, Y)$ est stable par A (en effet $AX = (\alpha X - \beta Y)$, $AY = (\alpha Y + \beta X)$ et on peut en déduire que Y n'est pas colinéaire à X.)

Ainsi $f(V \cap P) \subset V \cap P$. On obtient la même contradiction que précédemment en observant que la matrice de f dans la base (X, Y) de ce plan est

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \cos\theta & -sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

et que $f^{(n)}(rX) = r|\lambda|^n (\cos n\theta X + \sin n\theta Y)$ ne saurait indéfiniment appartenir à V.

14.125 Indication ou corrigé *7.11*

1. Ce qu'il faut montrer :

$$\forall a \in [-1, 1], \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \ |a - \cos \ln n| \leq \varepsilon.$$

L'idée est que $\ln n$ croît lentement vers $+\infty$:
Un élément $a \in [-1, 1]$ est de la forme $a = \cos \alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$. Il existe $n_k \in \mathbb{N}^*$, tel que $\ln n_k \leq \alpha + 2k\pi < \ln(n_k + 1)$; et pour un tel n_k,

$$\cos \ln n_k - a = -2 \sin \left(\frac{\ln n_k + \alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\ln n_k - \alpha}{2} \right).$$

On observe alors que l'on a $\lim_{n \to +\infty} n_k = +\infty$ et que

$$\left| \sin \left(\frac{\ln n_k - \alpha}{2} \right) \right| = \left| \sin \left(\frac{\ln n_k - \alpha - 2k\pi}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n_k} \right).$$

2. (a) Commençons par l'étude de $\phi_n(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n$.
Cette fonction a pour dérivée $\phi_n'(x) = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$ elle décroît de 0 à 1 sur $[0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$. x_n, la seule racine positive de $\phi_n(x) = 1$ est comprise entre 1 et 2 (car $\phi_n(2) = 2^n(n - 1) > 1$ pour $n > 1$).

   (b) Plus précisément, on vérifie que $1 = x_n^n(n(x_n - 1) - 1) > 0$ et $x_n > 1 + 1/n$; cela donne l'idée de regarder $\phi_n(1 + 2/n) = (1 + 2/n)^n(n(1 + 2/n) - (n + 1)) = (1 + 2/n)^n > 1$, on a donc

$$1 + \frac{1}{n} < x_n < 1 + \frac{2}{n}.$$

Si nous voulons voir plus loin (et nous voulons), comparons $\phi_n(x)$ et $\phi_{n+1}(x)$ ce qui est un classique pour l'étude de la monotonie :
— $\phi_n(x) - \phi_{n+1}(x) = -(n + 1)x^n(x - 1)^2 < 0$ sur $]1, +\infty[$;
— $\phi_n(x_n) - \phi_{n+1}(x_n) = 1 - \phi_{n+1}(x_n) < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$ et la suite décroît vers 1 ;
Si nous voulons voir plus loin (et nous voulons), posons $x_n = 1 + u_n$ et recherchons un équivalent de u_n.
Une conjecture inspirée de l'encadrement $1/n < u_n < 2/n$ est que $u_n \sim \dfrac{\alpha}{n}$. Si cela est vrai, en remplaçant dans l'équation, on obtient une CNS : α est solution de $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, ou de $\alpha + ln(\alpha - 1) = 0$, soit $\alpha = 1.278464543...$
Le calcul approché semble confirmer que $nu_n \sim \alpha$:

```
for i from 2 to 30 do
  10*i*(fsolve(phi(10*i,x)=1,x=1..2)-1);
od;
```

La preuve : Avec $x_n = 1 + u_n$, l'équation $nx^{n+1} - (n+1)x_n^n = 1$ devient :

$$n(1+u_n)^{n+1} - (n+1)(1+u_n)^n = (1+u_n)^n(n(1+u_n) - (n+1)) = 1,$$

soit encore $(1+u_n)^n(nu_n - 1) = 1$, comme $\lim u_n = 0$, il vient :

$$nu_n \sim n\ln(1+u_n) = -\ln(nu_n - 1).$$

Ce qui donne, en notant $nu_n = v_n \in]1,2[$, $\psi(x) = x + \ln(x-1)$ pour $x \in]1,2]$: $\psi(v_n) = o(v_n) = o(1)$ et $v_n = \psi^{-1}(o(1))$ a pour limite $\psi^{-1}(0) = \alpha$.
On a bien $x_n = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + o(1/n)$.
CQFD.

14.126 Indication ou corrigé *7.12*

Décomposition diagonale + nilpotent qui commutent :
Montons tout d'abord qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = T = D + N$ où D est diagonale, N nilpotente, ces deux matrices commutant.
En effet, si f est l'endomorphisme canoniquement associé à M, si $\chi_f(X) = (-1)^n \prod (X - \lambda_i)^{n_i}$, d'après le lemme des noyaux :

$$\mathbb{C}^n = \oplus_i \ker(f - \lambda_i id)^{n_i},$$

chacun des ces noyaux étant stable par f.
La restriction de $(f - \lambda_i)$ à chaque sev $\ker(f - \lambda_i id)^{n_i}$, est nilpotente. On peut écrire dans une base adaptée :

$$T = Mat(f,(a_k)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + N_1 & O & \dots & O \\ O & \lambda_2 I_{n_2} + N_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & & \lambda_p I_{n_p} + N_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & O & \dots & O \\ O & \lambda_2 I_{n_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & & \lambda_p I_{n_p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 & O & \dots & O \\ O & N_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & & N_p \end{bmatrix} ...$$

Ainsi, $T^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} D^{n-p}N^p$. Cette somme a au plus n_0 termes non nuls où $n_0 = \sup n_i$ est l'indice de nilpotence de N.
Supposons que $(M^n)_n$ **ait pour limite 0.** C'est aussi le cas pour $(T^n)_n$ (justifier). Les termes diagonaux de T^n (qui sont les λ_i^n) en particulier, ont pour limite 0, cela prouve que les valeurs propres vérifient $|\lambda_i| < 1$.
Réciproquement : supposons que les vp vérifient $|\lambda_j| < 1$, et considérons une norme matricielle quelconque, on a

$$|||T^n||| = |||\sum_{p=0}^{n_0} \binom{n}{p} D^{n-p}N^p|||$$

$$|||T^n||| \leq \sum_{p=0}^{n_0} \binom{n}{p} |||D^{n-p}|||\ |||N|||^p$$

et enfin, comme toutes les normes sont équivalentes, en comparant à la norme $\mathcal{N}(M) = \max |m_{i,j}|$ (qui n'est pas matricielle) et en considérant α tel que $|||M||| \leq \alpha N(M)$, nous avons

$$|||T^n||| \leq \alpha \sum_{p=0}^{n_0} \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} \mathcal{N}(D^{n-p})|||N|||^p \leq \alpha \max_{p \leq n_0} |||N|||^p \sum_{p=0}^{n_0} \frac{n^p}{p!} \rho(D)^{n-p} ...$$

14.127 Indication ou corrigé *7.13*

1. C'est une question de cours : l'espace $E = M_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, les normes sont équivalents, cet espce est complet. Considérons alors une norme matricielle sur E (une norme subordonnée quelconque par exemple) et montrons que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy en observant que $|||M^k||| \leq |||M|||^k$:

$$||S_{n+p} - S_n|| = \left|\left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} M^k\right|\right|\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} |||M|||^k.$$

Comme la série exponentielle converge dans $\mathbb{R}$, elle vérifie le critère de Cauchy et :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in N, \forall p \in N, n \geq N \Rightarrow ||S_{n+p} - S_n|| \leq \textstyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} |||M|||^k \leq \varepsilon.} \tag{14.20}$$

2. M est diagonalisable, ses deux valeurs propres sont 1 et 6, il existe P telle que $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ et $e^M = Pe^D P^{-1}$, il ne reste qu'à calculer P...

14.128 Indication ou corrigé *7.14*

Pas facile, mais m'a été rapporté tel quel ; peut-être une indication supplémentaire pour la première question ?

1. De la convergence simple sur $[a, b]$, $a < b$, à la cv simple sur $\mathbb{R}$:
   On introduit les polynômes interpolateurs de Lagrange en $p + 1$ points de $[a, b]$, $(x_0, ..., x_p)$. Ces polynômes $(\Lambda_i)_i$ forment une base de F_p et, pour tout polynôme de degré $\leq p$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{p} P(x_i) \times \Lambda_i(x).$$

   Si la suite $(P_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a, b]$, on a

$$\lim P_n(x) = \lim \sum_{i=0}^{p} P_n(x_i) \times \Lambda_i(x) = \sum_{i=0}^{p} f(x_i) \times \Lambda_i(x),$$

   pour tout réel x. Cela prouve en même temps que la limite simple est une fonction polynômiale.

2. De la convergence simple à la convergence uniforme sur tout segment.
   Observons tout d'abord que la convergence uniforme sur $[c, d]$, $c < d$, est définie par la norme : $\sup_{x \in [c,d]} |P(x)|$...
   Il suffira de prouver que notre suite de polynômes, appartenant à F_p de dimension finie, $p + 1$, converge pour une norme quelconque. Introduisons pour cela la norme : $N(P) = \sum_{i=0}^{p} |P(x_i)|$. C'est une norme en particulier parce que

$$N(P) = 0 \Rightarrow \forall i, P(x_i) = 0,$$

   ce qui entraîne que P qui a $p + 1$ racines est nul ; on laisse vérifier les autres propriétés.
   Nous avons alors, si $(P_n)_n$ converge simplement vers $f \in F_p$,

$$\lim N(P_n - f) = \lim \sum |P_n(x_i) - f(x_i)| = 0.$$

   La convergence pour cette norme entraîne la convergence pour la norme uniforme sur un segment quelconque. CQFD.

3. Sans restriction sur la dimension, tout cela devient faux : penser à $\left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right)_N$, qui converge simplement sur $[0, 1/2]$ par exemple...

14.129 Indication ou corrigé *7.15*
$[x]$ désigne la partie entière de x...

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $\varepsilon > 0$ il existe un couple (m, n) tel que

$$|x - (m + \ln n)| \leq \varepsilon.$$

• Observons que par exemple $\ln 17 = 2.833213344$, il est alors facile d'approcher tout nombre somme d'un entier $[x]$ et de $0.8332...$ par $([x] - 2) + \ln 17$ à 10^{-3} près par exemple ; nous voyons qu'il suffit de regarder la densité dans $[0, 1[$ des réels $\ln n - m$.

• On se donne alors $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, on pose $\mu = x - [x] \in [0, 1[$; le but est d'approcher μ...
Choisissons donc p entier tel que $e^{-p} < \varepsilon$ puis $n = [e^p e^\mu]$. On a alors, $n \leq e^p e^\mu < n + 1$ et $(\ln n - p) \leq \mu < \ln(n + 1) - p$.

Il vient alors $|(\ln n - p) - \mu| \leq \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{2}{n+1} < 2\varepsilon$.

14.7 Indications ou corrigés des exercices, espaces préhilbertiens

14.130 Indication ou corrigé *8.3*

1. (a) **Linéarité**
   - On considère x, y, z;

   $$(f(x+y)|z) = -(x+y|f(z)) = -(x|f(z)) - (y|f(z)) = (f(x)|z) + (f(x)|z) = +(f(x)+f(y)|z)...$$

   Comme pour chaque couple (x, y) cette relation est vraie pour tout z...
   - C'est de la même façon que l'on prouve que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$: $(f(\lambda x)|z) = -(\lambda x|f(z)) = -\lambda(x|f(z)) = +\lambda(f(x)|z)...$

   (b)

   (c)
2.
3.

14.131 Indications ou corrigé exercice 8.5

Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et introduire la fonction de carré intégrable définie par $X(t) = 1/x$ si $t \leq x$, et $X(t) = 0$, sinon.

□

14.132 Indications ou corrigé ex 8.6

1. classique n'oubliez pas que $(P|P) = 0 \Rightarrow P = 0$, parce qu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive et continue, sachez donner des contre-exemples lorsqu'une des deux hypothèses est absente.
2. $I_n = n!$ (récurrence) ;
3. Procédé de Gram-Schmidt à partir de la base X, X^2, X^3 :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,X,\ \frac{\sqrt{24}}{24}\left(X^2 - 6\,X\right)\ \frac{\sqrt{20304}}{20304}\left(X^3 + 24\,X^2 - 168\,X\right).$$

4. l'élément de F le plus proche de 1 est son projeté orthogonal ; il est donné par

$$\pi_F(1) = \sum_{i=1}^{3}(1|e_i)e_i =$$

□

14.133 Indications ou corrigé ex 8.7

1.
2.

□

14.134 Indication ou corrigé *8.9*

1. Supposons que $\sum_i \alpha_i e'_i = 0$, en particulier pour tout indice j, on a :

$$\left(e_j | \sum_i \alpha_i e'_i\right) = \alpha_j + \sum_{i=1}^{n} (e_j|\alpha_i f_i) = 0;$$

$$\alpha_j = -\sum_{i=1}^{n} (e_j|\alpha_i f_i) .$$

Considérons l'indice j pour lequel $|\alpha_j| = \sup |\alpha_i|$, la contradiction apparaît en majorant par l'inégalité triangulaire et avec Cauchy-Schwarz :

$$|\alpha_j| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| ||f_i|| \leq \sup |\alpha_i| \sum_{i=1}^{n} ||f_i||$$

2.

14.135 Indication ou corrigé *8.10*

• Une telle relation est toujours vérifiée lorsque $(e_k)_k$ est une BON de E.

• A l'inverse ?

On peut penser à remplacer x par e_i appartenant à la famille, cela donne

$$||e_i||^2 = ||e_i||^4 + \sum_{k \neq i} (e_k|e_i)^2,$$

ce qui impose $||e_i|| \leq 1$. Le cas d'égalité entraîne $e_k \perp e_i$ si $k \neq i$...Mais à part cela ?

Observons que, si $n = 1$, la relation ci-dessus impose $||e_1|| = 1$ et comme pour tout $x \in E$, $||x||^2 = (x|e_1)^2$, l'orthogonal de e_1 dans E est $\{0\}$: E est donc une droite euclidienne de BON (e_1). L'idée d'une récurrence sur n devient crédible.

Montrons par récurrence sur n que, si dans E préhilbertien réel, il existe une famille de n éléments tq, pour tout $x \in E$,

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2,$$

alors, E est de dim n et $(e_i)_i$ est une BON de E.

— Le résultat est vrai si $n = 1$;

— Supposons le vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$, et considérons un espace E contenant une famille de $n+1$ éléments tq pour tout $x \in E$,

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (x|e_k)^2. \tag{14.21}$$

Considérons x orthogonal à e_{n+1}. On peut écrire $||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. L'orthogonal F, de (e_{n+1}) satisferait donc à l'hypothèse de récurrence si nous étions en mesure de prouver que $e_1, ..., e_n$ sont dans F! Esquivons cette éventuelle difficulté en observant que $||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e'_k)^2$ où chaque e'_k est le projeté orthogonal de e_k sur F. Ainsi $(e'_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une BON de F (hypothèse. de récurrence).

Ainsi $dimF = n$ et $dimE = n + 1$. De plus, $1 \geq ||e_k|| \geq ||e'_k|| = 1$ (Pythagore) donc $e_k = e'_k \perp e_{n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$, et la famille est orthogonale.

Écrivons enfin (14.21) avec $x = e_{n=1}$:

$$||e_{n+1}||^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (e_{n+1}|e_k)^2 = ||e_{n+1}||^4.$$

Cela impose $||e_{n+1}|| = 1$, la démonstration est achevée, la famille est ortho**normée** donc libre, elle admet $n+1 = dimE$ éléments, c'est une BON.

14.136 Indication ou corrigé *8.11*

1. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, elle admet une BON de vp dans laquelle

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} < x_i|y_k > y_k.$$

Comme $a_{i,i} =^t x_i A x_i$, il vient :

$$a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} < x_i|y_k >^2 \lambda_k.$$

2. On en déduit immédiatement que $a_{1,1} \leq \lambda_1$ en observant que

$$||x_1||^2 = \sum_{k=1}^{n} < x_1|y_k >^2 .$$

On a ensuite :

$$a_{1,1} + ... + a_{p,p} = \sum_{i=1}^{p} \left\{ \sum_{k=1}^{n} < x_i|y_k >^2 \lambda_k \right\} \tag{14.22}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left\{ \sum_{k=1}^{p} < x_i|y_k >^2 \lambda_k + \sum_{k=p+1}^{n} < x_i|y_k >^2 \lambda_k \right\} \tag{14.23}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \sum_{i=1}^{p} < x_i|y_k >^2 + \lambda_{p+1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=p+1}^{n} < x_i|y_k >^2 \tag{14.24}$$

Remplaçons $\sum_{k=p+1}^{n} < x_i|y_k >^2$ par $1 - \sum_{k=1}^{p} < x_i|y_k >^2$, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_{p+1}) \sum_{i=1}^{p} < x_i|y_k >^2 + p\lambda_{p+1} \tag{14.25}$$

On majore par $||x||^2$ encore une fois...

3. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est une inégalité de convexité, on passe aux matrices positives à la limite en posant $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n$.

14.137 Indications ou corrigé 8.12

On suppose que $A\,{}^tA =^t A\,A$ et que A est nilpotente d'ordre p. Montrer que $A\,{}^tA = 0$.
La matrice $A\,{}^tA$ est symétrique et positive. Comme A et ${}^tA$ commutent, $(A\,{}^tA)^p = A^p\,{}^tA^p = 0$. Une matrice symétrique (réelle) positive est semblable à une matrice diagonale. Si cette dernière est nilpotente c'est qu'elle est nulle.

14.138 Indication ou corrigé *8.13*

1.

2. Il y a $n!$ matrices de permutation. $(n-1)!$ d'entre elles exactement présentent la valeur 1 en $p_{i,j}$ les autres présentant 0. La somme de ces matrices est la matrice dont tous les termes valent $(n-1)!$, leur moyenne est la matrice don tous les termes valent $\dfrac{1}{n}$.
3. On suppose que $P = tA + (1-t)B$ avec $t \in]0,\ 1[$, A, B éléments de K. Soit $p_{i,\sigma(i)}$ l'élément de la ligne i de P égal à 1. On a
$$p_{i,\sigma(i)} = tA_{i,\sigma(i)} + (1-t)B_{i,\sigma(i)}.$$
Comme les coefficients de A et B sont dans $[0,1]$, cette égalité n'est possible que si $A_{i,\sigma(i)} = B_{i,\sigma(i)} = 1$. A partir de là les autres termes de la ligne i de A comme de B sont nuls... Il vient $A = B = P$.
4. On introduit la matrice $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
On considère alors α suffisamment petit pour que les matrices $M \pm \alpha C$ soient encore des matrices stochastiques.

14.8 Indications ou corrigés des exercices, fonctions de plusieurs variables

14.139 Indication ou corrigé 9.8

$f : (x, y) \to x(\ln^2 x + y^2)$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.
Les extremums éventuels sont atteint en des points où le gradient de f s'annule. Or,

$$grad(f)(x, y) = [(\ln(x))^2 + y^2 + 2\ln(x), 2\,xy].$$

f admet deux points singuliers qui sont $(1, 0)$ et $(e^{-2}, 0)$

14.140 Indications ou corrigé 9.9

$f : (x, y) \to x^2 + x^2y + y^3$. Les extremums éventuels sont atteints en des points où le gradient de f s'annule. Or, grad(f)(x,y)=$[2\,x + 2\,xy, x^2 + 3\,y^2]$, et le seul point singulier est $(0, 0)$.
Un examen attentif de f au voisinage de 0 montre que

- sur $y = 0$, $f(x, 0) \geq f(0, 0) = 0$;
- sur $y < 0, x = 0$ $f(x, 0) \leq f(0, 0) = 0$;

La fonction f n'admet aucun extremum local...

14.141 Indication ou corrigé ??

1. Argument de compacité : f est continue sur D compact (car fermé, borné...)
2. Là, prudence : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'OUVERT $D^o \setminus \{O\}$, si un extremum est atteint en un point de cet ouvert, le gradient de f en ce point est nul, mais les extrema peuvent se trouver en$(0, 0)$ ou sur le cercle frontière.
   - on cherche les points singuliers sur l'ouvert : il n'y en a pas ;
   - on examine le point $(0, 0)$. f y atteint un minimum strict global ;
   - on examine les extrema sur le cercle : ici c'est facile, on recherche les extrema de

     $$\phi(t) = f(4\cos t, 4\sin t),$$

     qui sont 17 atteint en $(\pm 4, 0)$ et 1 atteint en $(0, \pm 4)$.

   Le bilan est immédiat.

14.142 Indication ou corrigé *9.10*

1. Considérons la fonction $t \to f(tx)$ définie sur $\mathbb{R}$ (propriété de D). Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$, donc avec la règle de la chaîne (9.1), on a :

   $$\frac{df(tx)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} = pt^{p-1} f(x).$$

   Lorsque $t = 1$, la deuxième égalité donne la formule 9.2.
2. Réciproquement, supposons que

   $$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = pf(x).$$

   Posons $g(t) = f(tx) - t^p f(x)$ et dérivons. Il vient pour $t \in \mathbb{R}^*$,

   $$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} - p\,t^{p-1} f(x) = \frac{pf(tx) - pt^p f(x)}{t}.$$

   g est donc solution du problème de Cauchy $y'(t) = \dfrac{p}{t} y(t)$ et $y(1) = 0$; g est donc nulle sur R^{+*} et pour $t > 0$ on a $f(tx) = t^p f(x)$.

Qu'en est il sur $\mathbb{R}^{*-}$? La fonction g vérifie la même équation sur R^{+*} et s'écrit donc, pour $t < 0$, $g(t) = K|t|^p$. La seule fonction de ce type ayant un prolongement nul en 0 est la fonction nulle. g est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

3. Il nous faudra discuter en fonction du domaine D.
   • Considérons f de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. On peut écrire vu la forme de D, $f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. L'équation devient
   $$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^p f(\cos\theta, \sin\theta).$$
   Une solution f est donc de la forme $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^p h(\theta)$ où h est de classe $\mathcal{C}^1$; si $D \cap C(0, 1)$ est le cercle entier on supposera h définie sur $\mathbb{R}$ de période 2π . De plus,
   $$f(-r\cos(\theta + \pi), -r\sin(\theta + \pi)) = (-1)^p r^p h(\theta + \pi) = r^p h(\theta),$$
   donc selon la parité de θ, h doit être π périodique ou π anti-périodique...

   • Réciproquement, considérons une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{R}$, π périodique si p est pair, π anti-périodique si p est impair. On peut définir une fonction de deux variables $f(x, y)$ sur D telle que $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^p h(\theta)$ lorsque $r \geq 0$. Elle vérifie bien $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$ pour $t \geq 0$ et lorsque $t < 0$, on a : $f(tx, ty) = f(tr\cos\theta, ty\sin\theta) = |t|^p r^p h(\theta + \pi) = t^p f(x, y)$.
   Bilan : f est solution ssi il existe h de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{R}$, π périodique si p est pair, π anti-périodique si p est impair telle que ...
   Illustrons : $f(x, y) = r^3\sin(\theta)$, $f(x, y) = r^4\sin^2(\theta)$...

14.143 Indications ou corrigé *ex. 9.11.*
Raisonnons par analyse synthèse : soit ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$, de différentielle
$$D(\phi)(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{bmatrix} \in O_2^+(\mathbb{R});$$
Cela s'exprime :
$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \text{ et } \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = 1.$$
D'après la troisième relation, il existe $\theta(x, y)$ telle que
$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \cos(\theta(x, y)) \\ \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} = -\dfrac{\partial Y}{\partial x} = -\sin(\theta(x, y)) \end{cases}$$
Si une telle fonction θ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut alors dériver :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x\partial y} = -\sin(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -\cos(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y} = -\sin(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \cos(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \end{cases}$$
On en déduit que $Rot(\theta)grad(\theta) = 0$, donc $\theta(x, y)$ est constante.
On démontre facilement, si on ne le sait déjà, que si la dérivée de Φ est une matrice constante, A, Φ est affine :
$$\phi(X) = AX + b.$$

Ici Φ est une rotation affine. Fin de l'analyse, la synthèse est évidente.

Remarque Le théorème de relèvement (théorème **??**, cité dans le corrigé de l'exercice **??**), que nous avons à notre programme nous cantonne aux fonctions d'une variable...Comment montrer le résultat ?

$\square$

14.144 Indications ou corrigé *ex. 9.11.*
Raisonnons par analyse synthèse : soit ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$, de différentielle

$$D(\phi)(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{bmatrix} \in O_2^+(\mathbb{R});$$

Cela s'exprime :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \text{ et } \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

D'après la troisième relation, il existe $\theta(x,y)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial X}{\partial x} & = & \dfrac{\partial Y}{\partial y} & = & \cos(\theta(x,y)) \\ \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial Y}{\partial x} & = & -\sin(\theta(x,y)) \end{array} \right.$$

Si une telle fonction θ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut alors dériver :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} & = & -\sin(\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial y} & = & -\cos(\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} & = & -\sin(\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} & = & \cos(\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{array} \right.$$

On en déduit que $Rot(\theta) grad(\theta) = 0$, donc $\theta(x,y)$ est constante.
On démontre facilement, si on ne le sait déjà, que si la dérivée de Φ est une matrice constante, A, Φ est affine :

$$\phi(X) = AX + b.$$

Ici Φ est une rotation affine. Fin de l'analyse, la synthèse est évidente.

Remarque Le théorème de relèvement (théorème **??**, cité dans le corrigé de l'exercice **??**), que nous avons à notre programme nous cantonne aux fonctions d'une variable...Comment montrer le résultat ?

$\square$

14.9 Indications ou corrigés des exercices, séries de fonctions

14.145 Indication ou corrigé 10.3

1. f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On dérive $f = u.u'$ (où $u = \arcsin$), ce qui donne $f' = u'^2 + uu"$... La fonction f est donc la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1-x^2)f'(x) - xf(x) & = 1. \\ f(0) & = 1 \end{cases}$$

On recherche alors une éventuelle solution DSE sur un intervalle $]-r, r[$ en posant $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. L'équation devient :

$$(1-x^2)\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} - x\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1$$

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n\geq 2}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n = 1.$$

Le coefficient constant du membre de gauche est $a_1 = 1$, pour $n \geq 2$, il vient

$$(n+1)a_{n+1} = na_{n-1}...$$

Rayon de convergence Comme $a_0 = 0$, les termes d'indices pairs sont nuls et, en posant $y = x^2$,

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} = x\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}y^p.$$

Le rayon de convergence de la série en x est la racine carrée du rayon de la série en y pour lequel le critère de d'Alembert nous fournit $R = 1$.

Expression des a_{2p+1} :

$$a_{2p+1} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. On a facilement

$$g(x) = \frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1/3}{x-2} + \frac{-1/3}{x+1}.$$

Il suffit alors de faire apparaître des séries géométriques :

$$\frac{-1/6}{1-x/2} + \frac{-1/3}{1+x} = \frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} + \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

La somme de ces séries converge pour $|x| < 1$ (car les deux séries convergent ; elle diverge pour $1 \leq |x| < 2$ car une série diverge et l'autre converge ; elle diverge pour $|x| \geq 2$ par le lemme d'Abel (et R=2).

Un DL_3 en 0 est donné par troncature du DSE en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{-1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$$

14.146 Indications ou corrigé ex *10.4.*

Soit
$$S : x \to \sum_{n=0}^{\infty} nxe^{-nx^2}.$$

1. Le domaine de définition de la fonction S est son domaine de convergence simple. Fixons donc x comme il se doit lorsqu'on étudie la cv simple.
   — Lorsque $x = 0$ la série converge ;
   — Lorsque $x \neq 0$, on a avec $q = e^{-x^2} < 1$:
   $$nxe^{-nx^2} = x \left(n^3 e^{-nx^2}\right) \frac{1}{n^2} = x \left(n^3 q^n\right) \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
2. La convergence est-elle normale, uniforme ?
   Il est toujours plus simple d'étudier la convergence normale. Cherchons donc à évaluer $||u_n||_\infty$.
   Pour cela étudions les variations de la fonction puisqu'une majoration simple n'apparaît pas. Son maximum est atteint en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ et vaut $u_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}$. La série des normes diverge grossièrement. Il n'y a pas cv normale sur $\mathbb{R}$. Il n'y a pas convergence uniforme non plus piuisque lea suite des somme partielles ne vérifie pas la condition nécessaire $||S_{n+1} - S_n||_\infty \to 0$. En effet,
   $$||S_{n+1} - S_n||_\infty = ||u_{n+1}||_\infty \to +\infty$$
   Par contre un examen du tableau de variation ou d'un graphe sommaire montre que la bosse se rapproche de 0. Il nous vient naturellement à l'idée de chercher la cv normale sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
   Comme u_n décroît sur $[a, +\infty[$ **dès que n est suffisamment grand,** on aura
   $$||u_n||_{\underset{[a,+\infty[}{\infty}} = u_n(a) = a\, n\, e^{-na^2}$$
   Il s'agit là d'une série numérique convergente. Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
3. Expression de S à l'aide de fonctions usuelles. Nous allons faire apparaître $\sum u_n$ comme une série de dérivées.

□

14.147 Indications ou corrigé ex *10.5.*

1. Convergence simple sur $]0, +\infty[$; divergence ailleurs, f est donc définie sur
2.

□

14.148 Indications ou corrigé *ex. 10.6*

1. Convergence absolue.
2. Considérons cette série comme une série entière en y.
   La dérivée de $g(y) = \sum a_n y^n$ est
   $$g'(y) = \sum \sin(nx) y^{n-1}.$$
   Le calcul de cette somme est évident : (oui !)

— $g'(0) = \sin(x)$
— pour y non nul,

$$yg'(y) = \sum \sin(nx)y^n = Im\left(\frac{1}{1-ye^{ix}}\right)$$

On a donc

$$g'(y) = \frac{\sin x}{(1-y\cos x)^2 + (y\sin x)^2} = \frac{1}{\sin x}\frac{1}{1+\left(\frac{y-\cos x}{\sin x}\right)^2}.$$

$$\int g'(y)\ dy = \frac{1}{\sin x}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y-\cos x}{\sin x}\right)^2}.$$

Remarque : l'énoncé donnait

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}y^n = \arctan\left(\frac{y\sin x}{1-y\cos x}\right),$$

mais c'est plus instructif si on le cherche soi-même.

□

14.149 Indications ou corrigé *ex. 10.7.*

1. Facile
2. Partition des permutations en $n+1$ parties formées des permutations qui laissent $n-k$ points invariants seulement (et en dérangent k).
3. Formule du produit de Cauchy et série géométrique, on obtient $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$...

□

14.150 Indications ou corrigé ex *10.8*

1. critère de d'Alembert
2. $(1-x)S'_p = (p+1)S_p$... on résout alors l'équation différentielle.

□

14.151 Indications ou corrigé 10.9

1. R=1 (obvious)
2. Intégration d'une SE.
3. Vérifier en dérivant les deux fonctions : les dérivées sont égales, les fonctions diffèrent d'une constante sur chaque intervalle contenu dans leur domaine de définition. On calcule la constante par passage à la limite.
   Analogue : démontrer que $\arctan(x) + \arctan(1/x) = signe(x)\pi/4$...
4. simple cas particulier ?

□

14.152 Indications ou corrigé 10.11

1.

2.

3.

14.153 Indications ou corrigé 10.12

1. On observe (et on doit savoir sans hésiter) que $|x-e^{it}|^2 = x^2 - 2x\cos t + 1$, on a donc
$$\Re\left(\frac{1}{x-e^{it}}\right) = \Re\left(\frac{x-e^{-it}}{|x-e^{it}|^2}\right) = \frac{x-\cos t}{x^2-2x\cos t+1}.$$
2. Développons donc
$$\frac{1}{x-e^{-it}} = \frac{-e^{it}}{1-xe^{it}} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^n e^{i(n+1)t},$$
série entière en x, de rayon 1. Ainsi,
$$\Re\left(\frac{1}{x-e^{it}}\right) = \frac{x-\cos t}{x^2-2x\cos t+1} = \Re\left(-\sum_{k=0}^{\infty} x^n e^{i(n+1)t}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\cos((n+1)t)x^n.$$
En intégrant terme à terme sur $[0,x]$ pour $|x|<1$, nous obtenons :
$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nt)}{n}x^n.$$
3. Le produit de Cauchy de cette série entière par elle-même est la série entière en x de même rayon égal à 1 :
$$\left(\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n,pq\neq 0}\frac{\cos(pt)\cos(qt)}{pq}\right)x^n$$
que l'on peut aussi considérer comme somme d'une série de fonctions de la variable t
$$u_n(t) = x^n\sum_{p+q=n,pq\neq 0}\frac{\cos(pt)\cos(qt)}{pq}$$
qui est normalement convergente pour $|x|<1$ puisque $||u_n||_\infty \leq (n+1)|x|^n$.
L'intégration terme à terme donne
$$\int_0^\pi \left[\ln(x^2-2x\cos t+1)\right]^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\left(\sum_{p+q=n,pq\neq 0}\int_0^\pi\frac{\cos(pt)\cos(qt)}{pq}\,dt\right) = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k^2}.$$
En effet, les intégrales sont toutes nulles (transformer les produits en sommes) sauf si $p=q$ ce qui impose que n soit pair (on a donc si $n=2k, p=q=k$... et le reste suit.
4. G est définie comme intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0,2\pi]$ puisque $(x^2 - 2x\cos t+1) = |x-e^{it}|^2$ est strictement positive dès lors que $x\neq 1$.
Remarque : Quelle relation y a-t-il entre $G(x)$ et $G(1/x)$ dans ce cas ?
$$G(x) = \int_0^\pi \left[\ln(x^2-2x\cos t+1)\right]^2\,dt$$
$$G(1/x) = \int_0^\pi \left[\ln\left(\frac{1}{x^2}-2\frac{\cos t}{x}+1\right)\right]^2\,dt = \int_0^\pi \left[\ln(x^2-2x\cos t+1)-\ln x^2\right]^2\,dt$$

5. Calcul pour $x \in]-1,1[$, de $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\ dt$.

   On justifie que l'on peut dériver sous le signe d'intégration, ce qui est facile si on choisit pour l'ensemble des paramètres x un intervalle compact $[-a,a] \subset]-1,1[$, l'intervalle d'intégration (le lieu de la variable t étant $[0,2\pi]$, compact lui aussi).

   Cela fait, $G'(x)$ s'écrit comme une intégrale que l'on sait calculer pour $|x| < 1$ et on revient à la remarque de la question précédente.

14.154 Indication ou corrigé *10.13*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

1. • Étudions la **convergence simple** (domaine de définition) :
   — si $x \leq 0$, la série est grossièrement divergente ;
   — si $x > 0$ on a $e^{-x\sqrt{n}} = o(1/n^2)$. En effet $\dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^2} \to 0$; il suffit de prendre le log pour le constater.

   La série converge donc est f est exactement définie sur $]0,+\infty[$.
   • Convergence normale. Considérons $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a,+\infty[$, $e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$. On a donc
   $$||f_n||_{\substack{\infty \\ [a,+\infty[}} = e^{-a\sqrt{n}};$$
   c'est là le terme général d'une série convergente. Comme $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > 0$, sa somme est continue sur $]0,+\infty[$.
2. La série de fonctions converge uniformément sur $[a,+\infty[$; chaque somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}$ admet en $+\infty$ la limite 1. On en déduit avec le théorème d'interversion des limites que
   $$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{k}} = 1.$$
3. Les fonctions f_n sont décroissantes, il en va de même pour la fonction f qui admet donc une limite réelle ou $+\infty$ en 0^+.

   Pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
   $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-x\sqrt{k}} \leq f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{k}}.$$
   Lorsque $x \to 0$, on obtient $n+1 \leq \lim_0 f$. Cela étant vérifié pour tout entier n, $\lim_0 f = +\infty$.

   Recherchons un équivalent :
   Commençons par encadrer le terme général de la série pour $x > 0$ et $n \geq 1$ et sommons :
   $$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$$
   $$1 + \int_1^{N+1} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leq \sum_{n=0}^{N} e^{-x\sqrt{n}} \leq 1 + \int_0^{N} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$$

   $$1 + \int_1^{\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leq f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq 1 + \int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt.$$

   ---

f est donc équivalente au voisinage de 0 à $F(x) = \int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}}\,dt$. Un changement de variable puis une ipp classique donnent :

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^\infty u\,e^{-xu}\,du = \frac{1}{x^2}$$

□

14.155 Indications ou corrigé 10.14

1. La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En effet $||u_n||_\infty \leq \dfrac{1}{2^n}$. Sa somme est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et continue comme limite uniforme de fonctions continues (les sommes partielles).
2. On calcule $u_n'(x) = \cos(2^n x)$ et on renonce rapidement à tout espoir raisonnable de mettre en œuvre le théorème de dérivation d'une limite qui figure à notre programme...
   Cela ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable, mais on n'y croit pas trop...
   On se place en 0 pour étudier le taux de variations (si on se place en x_0 quelconque pour rester dans la généralité, ça va se compliquer) :

   $$T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n x}$$

   Comme on ne croit pas à la dérivabilité, on essaye de montrer qu'il n'y a pas de limite en 0. On choisit alors la suite $(x_p)_p = \left(2^{-p}\right)_p$:

   $$\begin{aligned}
   T(2^{-p}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^{n-p})}{2^{n-p}} && (14.26)\\
   &= \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\sin(2^{n-p})}{2^{n-p}} + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{\sin(2^{n-p})}{2^{n-p}} && (14.27)\\
   &= \sum_{k=0}^{p} \frac{\sin(2^{-k})}{2^{-k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2^{k})}{2^{k}} && (14.28)\\
   &= \sum_{k=0}^{p} \frac{\sin(2^{-k})}{2^{-k}} + f(1) && (14.29)
   \end{aligned}$$

   Le premier terme est somme partielle d'une série grossièrement divergente... La suite $T(2^{-p})$ ne converge pas, T n'a pas de limite en zéro, f n'est pas dérivable en 0.

14.10 Indications ou corrigés des exercices, intégration

14.156 *Corrigé de l'exercice 11.1*

1. • La fonction $F : x \to \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt = n$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$ de limite $+\infty$ en 0 car l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,dt$ diverge (en effet, la fonction que l'on intègre est continue sur $]0,1]$ et $\frac{e^t}{t} \sim \frac{1}{t}$ au vois de 0).
   F réalise donc une bijection de $]0,1]$ sur $F(]0,1]) = [0,+\infty[$.
   Si on vous demande des détails soyez claires : l'injectivité vient de la monotonie stricte, la surjectivité ou le fait que $F(]0,1]) = [0,+\infty[$ est une conséquence du TVI (l'image d'un intervalle est un intervalle).
   • L'équation $F(x) = n$ admet donc une seule solution $u_n = F^{-1}(n)$ dans $]0,1]$.
2. Comme F^{-1} est une bijection décroissante de $|1,+\infty[$ sur $]0,1]$ l'image de la suite croissante $(n)_n$ de limite $+\infty$ est la suite décroissante $(u_n)_n$ de limite 0.
3. Pour étudier n, $v_n = n + \ln u_n$ on écrira $n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,dt$ et $\ln\star = -\int_\star^1 \frac{1}{t}\,dt$ pour faire apparaître :
   $$v_n = n + \ln u_n = \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,dt - \int_{u_n}^1 \frac{1}{t}\,dt = \int_{u_n}^1 \frac{e^t-1}{t}\,dt.$$
   L'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,dt$ étant convergente, $(v_n)_n$ admet une limite qui est précisément cette intégrale.
4. Équivalent de u_n : avec des notations évidentes (ce qui précède et usage), on a $v_n = n + \ln u_n = L + \varepsilon_n$ soit encore $\ln u_n = -n + L + \varepsilon_n$ d'où :
   $$u_n = e^{-n}e^L e^{\varepsilon_n} \sim \frac{e^L}{e^n}.$$

14.157 Indications ou corrigé 11.2.

Voir correction dans l'exercice détaillé qui suit. L'idée est de montrer que cette intégrale définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, de calculer sa dérivée...

14.158 Indications ou corrigé 11.3.

1. Existence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$.
   La fonction $|f(t)| = \left|\frac{e^{-t}\sin t}{\sqrt{t}}\right|$ est continue sur $]0,+\infty[$. Étudions son comportement aux bornes de l'intervalle :
   — Au voisinage de 0, $|f(t)| \sim_{t\to 0} \sqrt{t}$ elle admet donc un ppc à $[0,+\infty[$;
   — sur $[1,+\infty[$, $|f(t)| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = g(t)$. Or, $g(t)t^2 = e^{-t}t^{3/2} = o(1)$ ou $g(t) = o(1/t^2)$...
   f est donc intégrable sur $[1,+\infty[$
   Bilan f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. $$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}e^{-i\,x\,t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty h(x,t)\,dt.$$
   Justifions que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Notons $A =, I =]0,+\infty[$. Observons que $\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = -i\,e^{-t}e^{-i\,x\,t}\sqrt{t}$ sur $A \times I$.

— pour tout $x \in A$, $t \to h(x,t)$ est continue sur I
— pour tout $t \in I$, $t \to h(x,t)$ est continue sur A
— **domination** $\left|\dfrac{e^{-t}e^{-i\,x\,t}}{\sqrt{t}}\right| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$
qui définit une fonction intégrable sur I puisque

$$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

— pour tout $x \in A$, $t \to \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ est continue sur I
— pour tout $t \in I$, $t \to \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ est continue sur A
— **domination** $\left|\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right| = \left|e^{-t}e^{-i\,x\,t}\sqrt{t}\right| \leq e^{-t}\sqrt{t}$ qui définit une fonction intégrable sur I;

Cela prouve que F est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Comme
$$F'(x) = -i \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-i\,x\,t}\sqrt{t}\;dt$$
en intégrant $F(x)$ par parties nous allons pouvoir comparer $F(x)$ et $F'(x)$:
$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}e^{-i\,x\,t}}{\sqrt{t}}\;dt = \left[2\sqrt{t}\,e^{-t}e^{-i\,x\,t}\right]_0^{\infty} + 2(1+i\,x)\int_0^{\infty} e^{-t(1+i\,x)}\sqrt{t}\;dt$$
Cela nous conduit à la relation $F'(x) = 2\,i\,(1+i\,x)\,F(x)$. F est donc solution de l'équation différentielle linéaire $y' - 2\,i\,(1+ix)y = 0$, dont les solutions sont les fonctions $y(x) = K\,e^{2i\,x-x^2}$. Dans notre cas, $K = F(0) = 2\int_0^{\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\;dt$; on calcule cette intégrale en posant $u = \sqrt{t}$; on retrouve l'intégrale de Gauss et $K = \sqrt{\pi}$.

voir 11.3

14.159 Indications ou corrigé 11.4.

— commencer par multiplier et diviser par la quantité conjuguée ; on a alors
$$J = \int_{-1}^{1} 1/2\,\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}dx.$$
— calculons ensuite :
$$J_1(a) = \int_{-a}^{1} 1/2\,\frac{\sqrt{1+x}}{x}dx.$$
$$J_2(a) = \int_{-1}^{a} 1/2\,\frac{\sqrt{1-x}}{x}dx.$$
elles se calculent en posant
$$u = \sqrt{1+x},\; v = \sqrt{1-x}...$$
et on passe à la limite :
$$\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)^{-1}dx = 2\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1) - \ln(1+\sqrt{2})$$

□

14.160 Indications ou corrigé *11.5.*

□

14.161 Indications ou corrigé *11.6.*

1.
2.
3. Voir la question 2 de l'exercice 11.7 très analogue et corrigée en 14.162.

□

14.162 correction de l'exercice 11.7.

1. On ne se préoccupe pour l'instant (énoncé) que de l'existence de l'intégrale impropre donc de la convergence de
$$\int_1^X e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx.$$
On a pensé ipp, changement de variable, on se rabat sur un découpage de l'intervalle avec la relation de Chasles :
$$\int_\pi^X e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx + \int_{(n)\pi}^X e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx$$
avec $n\pi \leq X \leq (n+1)\pi$ soit $n = Ent\left(\frac{X}{\pi}\right)$.
L'idée est que si la série converge, on va pouvoir établir l'existence d'une limite parce que le terme restant a pour limite 0.
- On note $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx$, on voit que la série est du signe de $(-1)^k$;
- $\lim |u_k| = 0$. En effet,
$$|u_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} |\sin x| \, dx$$
$$|u_k| \leq e^{-\sqrt{\ln k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, dx = cste \times e^{-\sqrt{\ln k\pi}}$$
- Par ailleurs, on étudie la différence avec le changement de variable $u = x + \pi$ (comme on a pu le faire dans le cours pour $\int \frac{\sin t}{t} dt$) :
$$\begin{aligned} |u_{n+1}| - |u_n| &= \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} |\sin x| \, dx - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} |\sin x| \, dx \\ &= \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} |\sin x| \, dx - \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} e^{-\sqrt{\ln(u-\pi)}} |\sin(u-\pi)| \, du \\ &= \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \left(e^{-\sqrt{\ln(u)}} - e^{-\sqrt{\ln(u-\pi)}}\right) |\sin x| \, dx < 0 \end{aligned}$$
La série $\sum u_n$ vérifie donc le CSSA, elle converge et il ne reste plus qu'à montrer que $\lim \left(\int_{(n-X)\pi}^X e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx\right) = 0$... C'est en fait facile à établir puisque
$$\left| \int_{n\pi}^X e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx \right| \leq \pi e^{-\sqrt{\ln n_X \pi}}.$$

$\square$

2. La fonction $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

   • Au voisinage de 0 elle est intégrable car $|f(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$...

   • On ne voit pas immédiatement de technique pour étudier directement le comportement au voisinage de $+\infty$. Une idée sera de développer l'expression trigonométrique :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Au vois de $+\infty$, $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cos x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq \left|\dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \sim \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, le second membre est donc une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$;
   En ce qui concerne le terme $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on observe que $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ ce qui conduit à

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x - \frac{1}{2x^2\sqrt{x}} \sin x + o\left(\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}\right) \sin x$$

   la première fonction admet une intégrale impropre (intégrer par parties pour faire apparaître une fonction intégrable), les deux autres sont visiblement intégrables.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

   est donc bien définie comme intégrale impropre.

3. Étudions la troisième intégrale,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

   • La fonction $\dfrac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie sur $]0, +\infty[$, elle admet un ppc en 0 qui prend la valeur 0 (car $\sin x \ln x \sim x \ln x$ a pour limite 0).
   • **Étude en** $+\infty$: Une majoration brutale de $|\sin x|$ par 1 conduirait à une fonction équivalente à une fonction de Bertrand non intégrable. On ne voit pas bien ici ce que donnerait une ipp ou d'un changement de variable...

   Essayons plutôt d'étudier cette intégrale impropre avec un découpage avec Chasles pour nous ramener à une série alternée. C'est plus tentant de par la présence du sinus (cours, premier exemple de cette série...)

$$\int_\pi^X \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx + \int_{n\pi}^X \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

   avec $n\pi \leq X \leq (n+1)\pi$ soit $n = Ent\left(\dfrac{X}{\pi}\right)$. On pose donc

$$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

   — $|u_k|$ est du signe du sinus sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ soit $(-1)^k$;

— $\lim |u_k| = 0$ puisque

$$|u_k| \leq \frac{\ln(k+1)\pi}{\sqrt{(k\pi)^2+1}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx$$

— Après changement de variable dans la deuxième intégrale,

$$|u_{k+1}| - |u_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\ln(x-\pi)}{\sqrt{(x-\pi)^2+1}} \right) |\sin x|\, dx$$

C'est l'étude des variations de $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$ qui va nous permettre de conclure :

$$f'(x) = -\frac{-x^2 - 1 + \ln(x)\, x^2}{x\,(x^2+1)^{3/2}}$$

est du signe de $\phi(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} - \ln x$ pour laquelle $\phi'(x) < 0$... Les fonctions f et ϕ de dérivées négatives sont $\searrow$

Il reste à évaluer $\displaystyle\int_{n\pi}^{X} \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ ce qui est sans mystère...

14.163 Indications ou corrigé *11.8.*

□

14.164 Indications ou corrigé *11.9.* corrigé avec celui de l'ex. 6.11 sur les séries numériques dont c'est une des questions.

□

14.165 Indications ou corrigé *11.10.*

1. application triviale du théorème de convergence dominée ;
2. Nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_{\pi}^{x} \tag{14.30}$$

$$= \int_{\pi}^{x} \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\, dt \tag{14.31}$$

$$= \frac{-1}{2i} \int_{\pi}^{x} \frac{e^{it/2}}{\sin t/2} (1 - e^{int})\, dt. \tag{14.32}$$

Observons que sur l'intervalle $]x, \pi[$, $\dfrac{1}{\sin(t/2)} \leq \dfrac{1}{\sin(x/2)}$.

On a donc

$$\int_{\pi}^{x} \frac{e^{it/2}}{\sin t/2} (1 - e^{int})\, dt = \int_{\pi}^{x} \frac{e^{it/2}}{\sin t/2}\, dt - \int_{\pi}^{x} \frac{e^{it/2}}{\sin t/2} e^{int}\, dt \tag{14.33}$$

La deuxième intégrale a pour limite 0 (lemme de Riemann, intégration par parties). La série est donc convergente et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\pi}}{k} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{x} \frac{e^{it/2}}{\sin t/2}\, dt \tag{14.34}$$

$$= \frac{x-\pi}{2} i - \ln 2 + \ln \sin(x/2) \tag{14.35}$$

3. (a) La fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$, positive (ce qui nous autorise les comparaisons).

$$f_n(x) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(1+x/n)}{x} \underset{0}{\sim} 1/n;$$

la fonction est intégrable sur $]0,1]$.

$$f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{1+x^2}\right);$$

la fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$.

(b) Pensons au théorème de convergence dominée :
— comme chacun sait $n\ln(1+x/n) = \ln\left((1+x/n)^n\right) \leq \ln e^x = x$;
— les fonctions continues par morceaux $nf_n(x)$ vérifient

$$|nf_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

cette dernière fonction est intégrable sur I;
— la suite $nf_n(x) = \dfrac{\ln\left((1+x/n)^n\right)}{x(1+x^2)}$ converge simplement vers $\dfrac{1}{1+x^2}$.

On en conclut facilement avec le théorème de convergence dominée (thm 11.2), que la limite cherchée est $\pi/2$.

(c) $\pi/2n$.

□

14.166 Indication ou corrigé *11.11*

1.
2.

14.167 Indication ou corrigé *11.12*

1.
2.

14.168 Indication ou corrigé *11.13*

1. Classiquement, avec le théorème 11.6 :
— la fonction $\phi : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \to \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$;
— la fonction $g : t \to \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x, $|\phi(x,t)| \leq g(t)$; Cela assure que f est continue sur $\mathbb{R}$.
— La fonction $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \to \dfrac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
— Considérons $a > 0$. La fonction $g_1 : t \to \dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in [a,+\infty[$, $|\phi(x,t)| \leq g_1(t)$.
Cela assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, et partant sur $]0,+\infty[$. Comme f est impaire, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

On peut se poser la question de la dérivabilité en 0 (elle ne semble pas avoir été posée lors de l'oral). Pour cela on écrira le taux de variation

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,dt,$$

que l'on minorera par $\int_0^A \frac{\arctan(xt)}{xt}\frac{t}{1+t^2}\,dt$, dont le théorème de convergence dominée nous donne la limite sous forme d'une intégrale facile à minorer :

$$\lim\left(\int_0^A \frac{\arctan(xt)}{xt}\frac{t}{1+t^2}\,dt\right)=\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,dt\geq\int_1^A \frac{1}{2t}\,dt=1/2\ln A...$$

2. Considérons une suite $(x_n)_n$ de limite $+\infty$, la suite d'intégrales

$$\int_0^\infty f_n(t)\,dt=\int_0^\infty \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,dt.$$

Toujours avec le théorème de convergence dominée, on obtient $\frac{\pi^2}{4}$.

14.169 Indication ou corrigé *11.14*

• On peut penser à une série :

Écrire $\ln(a+b\cos t)=\ln a+\ln(1+b/a\cos t)$. On sait que pour $|x|<1$, $\ln(1+x)=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, et donc, que pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\ln\left(1+\frac{b}{a}\cos t\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n\cos^n t,$$

la convergence de la série des fonctions $t\to\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n\cos^n t$, étant normale sur $\mathbb{R}$.
On fera en fin de compte apparaître des intégrales de Wallis...

• On peut aussi observer que la dérivée sera une intégrale de fonction rationnelle en cos t.

$$\int_0^\pi \ln(a+b\cos t)\,dt=\pi\ln a+\int_0^\pi \ln(1+b/a\cos t)\,dt.$$

Posons $f(x)=\int_0^\pi \ln(1+x\cos t)\,dt$. classiquement, nous avons :
- — la fonction $x\to\ln(1+x\cos t)$ est continue sur $[-a,a]\subset]-1,1[$;
- — la fonction $t\to\ln(1+x\cos t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$;
- — pour $x\in[-a,a], t\in[0\pi]$, $|\ln(1+x\cos t)|\leq\sup(|\ln(1+a)|,|\ln(1-a)|)$, fonction constante et intégrable sur notre intervalle;
- — la fonction $x\to\frac{\partial}{\partial x}\ln(1+x\cos t)=\frac{\cos t}{1+x\cos t}$ est continue sur $[-a,a]\subset]-1,1[$;
- — la fonction $t\to\frac{\partial}{\partial x}\ln(1+x\cos t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$;
- — pour $x\in[-a,a], t\in[0\pi]$, $\left|\frac{\cos t}{1+x\cos t}\right|\leq\frac{1}{1-a}$, fonction et intégrable sur notre intervalle.
- — Ouf !

Il vient donc avec le changement de variable $u=\tan x/2$:

$$f'(x)=\int_0^\pi\frac{\cos t}{1+x\cos t}\,dt=2\int_0^\infty\frac{1-u^2}{(1+u^2)((1+x)+(1-x)u^2)}\,du.$$

On poursuit sans difficulté :

$$\int_0^{\infty} \frac{1-u^2}{(1+u^2)((1+x)+(1-x)u^2)}\ du = \frac{1}{(1+x)} \int_0^{\infty} \frac{1-u^2}{(1+u^2)\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}u^2\right)}\ du.$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1-u^2}{(1+u^2)\,(1+\alpha^2 u^2)} = \frac{\alpha^2+1}{(1+\alpha^2 u^2)\,(\alpha^2-1)} - 2\,\frac{1}{(1+u^2)\,(\alpha^2-1)}$$

Enfin :

$$\int_0^{\infty} \frac{1-u^2}{(1+u^2)(1+\alpha^2 u^2)} = 1/2\,\frac{\pi\ (\alpha-1)}{\alpha\ (1+\alpha)}.$$

A FINIR remplacer et expliciter f'

14.170 Indication ou corrigé 11.15

1. Pour calculer on pensera au changement de variable $x = \tan t$ en prenant garde à l'intervalle d'intégration. On observera au préalable que

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 t}\ dt = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 t}\ dt,$$

Alors, avec le changement de variable $x = \tan t/2$:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 t}\ dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x^2}}\ \frac{dx}{1+x^2}...$$

2. • **Idée 1 :** Observons que

$$\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)' = e^{x^2}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x^2}.$$

Or, si deux fonctions continues par morceaux et positives sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, leurs intégrales sur $[1,+\infty[$ par exemple sont de même nature et si elles ne sont pas intégrables on a : $\int_1^x f \sim \int_1^x g$ (ce que l'on redémontrera en écrivant $f(t) = (1+\varepsilon(t) = g(t)$...
Comme $\int_0^x e^{t^2}\ dt \to +\infty$, $\int_0^x e^{t^2}\ dt \sim \int_1^x e^{t^2}\ dt$, ce qui enfin donne :

$$\int_0^x e^{t^2}\ dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x e^{t^2}\ dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x};$$

• **Idée 2 :** On peut aussi observer que $\int_0^x = \int_0^1 + \int_1^x \sim \int_1^x$ puisque cette dernière intégrale a pour limite $+\infty$. On intègre alors par parties

$$\int_1^x \frac{1}{2t}2te^{t^2}\ dt = \left[\frac{-e^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}, dt.$$

et la deuxième intégrale est négligeable devant celle du membre de gauche puisque

$$\frac{e^{t^2}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{t^2}\right).$$

3. f étant continue sur $[0,1]$, que dire de la limite de

$$\int_0^1 f(t^n)\,dt?$$

Simple application du TCD...

14.171 Indication ou corrigé *11.16*

1. En écrivant

$$P_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = 1 + \sum_{n\geq 1} r^n \left(e^{int} + e^{-int}\right),$$

nous avons une série de fonctions définie par $u_0(t) = 1$, $u_n(t) = 2r^n \cos nt$ si $n \geq 1$. Comme $||u_n||_\infty = r^n$, cette suite converge normalement pour $r < 1$, diverge grossièrement sinon. La somme est, lorsque $r < 1$:

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}.$$

2. Les fonctions

$$(r,\theta,t) \to \frac{\partial^k}{\partial r^k} P_r(t-\theta)u(t),$$
$$(r,\theta,t) \to \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} P_r(t-\theta)u(t),$$

cvérifient pour tout $k \geq 0$ les propriétés suivantes On en déduit que la fonction

$$(r,\theta) \to \int_{[0,2\pi]} P_r(t-\theta)u(t)\ dt$$

admet des dérivées partielles continues à tous les ordres.

En effet,

3. On observe (intégration terme à terme d'une série de fcts. Normalement convergente) que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} P_r(t)\ dt = 1,$$

puis que, pour $\alpha > 0$,

$$\int_{[\alpha,2\pi-\alpha]} P_r(t)\ dt \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\alpha}\int_{[\alpha,2\pi-\alpha]} dt \underset{r\to 1^-}{\to} 0.$$

On a donc

$$2\pi(\tilde{u}(re^{i\theta}) - u(\theta)) = \int_{[0,2\pi]} P_r(t-\theta)(u(t)-u(\theta))\ dt$$

$$= \left[\int_{[\alpha,2\pi-\alpha]} + \int_{[0,\alpha]} + \int_{[2\pi-\alpha,2\pi]}\right] P_r(s)(u(s+\theta)-u(\theta))\ ds.$$

La première et la troisième intégrales sont majorées par $2||u|| \int_{[\alpha,2\pi-\alpha]} P_r(s)\,ds$, et a pour limite 0 lorsque r tend vers 1 . La seconde est majorée par

$$\omega_u(\alpha) = \sup_{|s-t|\leq\alpha} |u(s)-u(t)|.$$

14.172 Indication ou corrigé *11.17*

1.
2.
3.

14.173 Indication ou corrigé *11.18*

1. La série des fonctions $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux . Si la série des intégrales convergeait, d'après le théorème d'intégration terme à terme, la limite serait intégrable, or cette limite est
$$S(t) = 1 + \frac{1}{t^3}...$$
2.

14.174 Indication ou corrigé *11.19*

1. Pour $x > 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-a_n x}$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial, elle converge donc et sa somme est majorée par le premier terme qui est $e^{-a_1 x}$. Concernant la série de fonctions, les hypothèse du théorème de convergence dominée sont satisfaites :
— $\sum_n (-1)^n e^{-a_n x}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$;
— les sommes partielles sont majorées par une fonction intégrable : $|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{-a_n x}| \leq e^{-a_1 x} = \phi(x)$;
Alors
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-a_n x}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n x}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}.$$
2.
3.

14.175 Indication ou corrigé *11.20*

1. Convergence simple vers la fonction $x \to x$ sur $\mathbb{R}^+$, (x=0, x¿0) ;
2. Variations de $f_n - f$; le max est atteint en $x = 1/n$ et vaut $n^{alpha-1}/e$ et il y a cv uniforme ssi $\alpha < 1$.
3. Pour $\alpha < 1$ c'est clair ;
Pour $\alpha = 1$, théorème de convergence dominée avec domination par une constante ;
sinon calcul explicite de l'intégrale de la différence et discussion selon α... La réponse : pour $1 < \alpha < 2$, convergence de l'intégrale de f_n vers celle de sa limite ; pour $\alpha = 2$ vers une autre limite, pour $\alpha > 2$, limite infinie.

14.176 Indication ou corrigé *11.21*

1.
2.

14.177 Indication ou corrigé *11.22*

1.
$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x + x^2 + ... + x^n}\, dx$$
Etude du terme général avec le TCD :

— Sur l'intervalle d'intégration $[0,1[$, la suite $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+...+x^n} = \dfrac{1-x}{1-x^{n+1}}$ converge simplement vers $f(x) = 1-x$.
— Toutes ces fonctions sont continues par morceaux .
— Il existe une fonction ϕ, intégrable sur $[0,1[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, $|f_n(x)| \leq \phi(x) = 1$.

On en déduit que la suite des intégrales converge et a pour limite $\int_0^1 (1-x)\,dx = \dfrac{1}{2}$. la série est grossièrement divergente.

2. Nous allons commencer par encadrer les intégrales :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2+...+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)x^n}{1-x^{n+1}}\,dx \leq \int_0^1 (1-x)\,x^n\,dx = \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

La série à termes positifs est donc convergente.

14.11 Indications ou corrigés des exercices, équations et systèmes différentiels

14.178 *Corrigé de l'exercice 12.1*

1. Le système d'ordre 1 en $Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ associé à cette équation est

$$Y'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

On connaît par ♡ les solutions de l'équation scalaire homogène et du système homogène d'ordre 1 : elles sont respectivement de la forme $a\cos x + b\sin x$ et de la forme $a \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$. On obtient dans les deux cas un système fondamental de solutions.

On choisit de travailler en dimension 2 et à l'ordre 1 et on cherche les solutions sous la forme $Y(x) = \alpha(x)Y_1(x) + \beta(x)Y_2(x)$ ce qui donne :

$$Y'(x) = \alpha(x)Y_1'(x)+\beta(x)Y_2'(x)+\alpha'(x)Y_1(x)+\beta'(x)Y_2(x) = A(\alpha(x)Y_1(x)+\beta(x)Y_2(x))+\begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

On simplifie et il reste :

$$\alpha'(x)Y_1(x) + \beta'(x)Y_2(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'(x) \\ \beta'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha'(x) \\ \beta'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ +\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

On intègre pour obtenir $\begin{cases} \alpha(x) & = \alpha(0) + \displaystyle\int_0^x -\sin t g(t)\, dt \\ \beta(x) & = \beta(0) + \displaystyle\int_0^x \cos t g(t)\, dt \end{cases}$

en remplaçant, $y(x) = \cos x \left(\alpha(0) + \displaystyle\int_0^x -\sin t g(t)\, dt\right) + \sin x \left(\beta(0) + \displaystyle\int_0^x \cos t g(t)\, dt\right)$

ce qui donne : $\boxed{y(x) = \alpha(0)\cos x + \beta(0)\sin x + \displaystyle\int_0^x (-\cos x \sin t + \sin x \cos t) g(t)\, dt}$

2. On pose $f" - f = g$, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, cette fonction est continue et nous sommes avec les conditions $f(0) = f'(0) = 0$ en présence d'un problème de Cauchy dont l'unique solution est : $y(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)\, dt$.

On dérive, une fois, pour voir (avec la formule $y(x) = \cos x \int_0^x -\sin t g(t)\, dt + \sin x \int_0^x \cos t g(t)\, dt$) : et on trouve $y'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)g(t)\, dt$...

14.179 Indications ou corrigé *exercice 12.2.* .

1. C'est une équation linéaire scalaire. On l'étudie sur un intervalle sur lequel x ne s'annule pas pour pouvoir l'écrire sous la forme normale (déjà prévu par l'énoncé). Par la méthode de variation des constantes on obtiendra

$$y(x) = x^{-\lambda}(C + \int_a^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\, dt).$$

Il faut penser que l'on peut aussi écrire

$$y(x) = x^{-\lambda}\left(C_0 + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt\right),$$

car la fonction $\dfrac{t^{\lambda-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1[$.
Analyse Comme $\lambda > 0$, une CN pour que cette expression admette une limite en 0 est que $C_0 = 0$ ou $C = -\int_a^0 \dfrac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt$. La solution correspondante est alors

$$y(x) = x^{-\lambda}\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt. \tag{14.36}$$

Par comparaison on détermine un équivalent de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt \underset{x\to 0}{\sim} \int_0^x t^{\lambda-1}\,dt = \frac{x^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Synthèse évidente, la fonction définie en (14.36) est solution ;

2. Sans mystère : si une solution est DSE au voisinage de 0, elle coïncide avec

$$x^{-\lambda}\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt$$

sur un voisinage de 0. On peut soit chercher un DSE de cette fonction (développer sous le symbole d'intégration...) ou bien classiquement chercher une solution DSE. L'examinateur pourrait bien vous demander la première, histoire de s'assurer que vous savez intégrer de façon justifiée des séries.

(a) Solutions de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$xy'(x) + \lambda y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

On en déduit

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda} x^n.$$

(b) autre méthode

□

14.180 Indications ou corrigé *exercice 12.3. .*

1. RAS. Récurrence d'ordre 4 :

$$a_{4p} = \frac{a_0}{(2p+1)!} \text{ et } a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Ce qui donne comme solutions DSE, les fonctions :

$$z(x) = a_0\frac{shx^2}{x^2},$$

développables en SE sur $\mathbb{R}$. On observe que l'ensemble de ces solutions forme un ev de dimension 1.

2. On sait que les solutions sur $I =]0, +\infty[$ ou sur $J =]-\infty, 0[$ forment un ev de dimension 2. On recherche ces fonctions en posant

$$y(x) = \alpha(x)z(x)$$

où z ne s'annule pas (il n'est pas indispensable de disposer d'un système fondamental de solutions).

□

14.181 Indication ou corrigé *12.5*

1. *Résolvons tout d'abord le système homogène :* $Y' = AY$.
On observe que si $PZ(t) = Y(t)$, Z est solution du système $Z' = P^{-1}APZ$...
Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable, nous pouvons construire P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
— $\chi_A(X) = X^3 - 9\,X^2 + 24\,X - 18 = (X-3)\left(X^2 - 6\,X + 6\right)$;
— $Sp_{\mathbb{R}}(A) = 3, 3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}$;
— $ker(A-3) = vect([1,1,1])$;
— $ker(A-3-\sqrt{3}) = vect([1-\sqrt{3}, \sqrt{3}-2, 1])$;
— $ker(A-3+\sqrt{3}) = vect([1-\sqrt{3}, 1, -2+\sqrt{3}])$;
Ces calculs donnent par exemple (pas besoin de chercher une BON de diagonalisation, bien qu'elle existe) :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1 & -2+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1 & -2+\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

2. Le système vérifié par $Z = P^{-1}Y$ (pas la peine de calculer P^{-1} pour l'instant) est

$$\begin{cases} x' &= 3x \\ y' &= (3+\sqrt{3})y \\ z &= (3-\sqrt{3})z \end{cases}$$

d'où $Z(t) = [ae^{3t}, be^{(3+\sqrt{3})t}, ce^{(3-\sqrt{3})t}]$.

3. On en déduit un système fondamental de solutions du système homogène, $Y = AY$:

$$\begin{aligned} Y &= aP(e_1)e^{3t} + bP(e_2)e^{(3+\sqrt{3})t} + cP(e_2)e^{(3-\sqrt{3})t} && (14.37) \\ &= a\Phi_1(t) + b\Phi_2(t) + c\Phi_3(t). && (14.38) \end{aligned}$$

4. Cela nous permet de rechercher les solutions sous la forme

$$Y(t) = a_1(t)\phi_1(t) + a_2(t)\phi_2(t) + a_3(t)\phi_3(t).$$

En effet, une telle fonction est solution de $Y' = AY + B$ ssi :

$$Y'(t) = \sum a_i'(t)\phi_i(t) = B(t),$$

soit

$$\begin{bmatrix} e^t & e^{(3+\sqrt{3})t}\left(1-\sqrt{3}\right) & e^{(3-\sqrt{3})t}\left(1-\sqrt{3}\right) \\ e^t & e^{(3+\sqrt{3})t}\left(-2+\sqrt{3}\right) & e^{(3-\sqrt{3})t} \\ e^t & e^{(3+\sqrt{3})t} & e^{(3-\sqrt{3})t}\left(-2+\sqrt{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1'(t) \\ a_2'(t) \\ a_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

D'où $X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t Q^{-1}(t)Q^{-1}(s)B(s)\,ds$.

14.12 Indications ou corrigés des exercices de probabilités

14.182 *corrigé de l'exercice ??. Une feuille de calcul, vous devez savoir faire la même chose avec votre calculette. Ce sujet Zéro n'était pas gérable sans elle !*

restart;
with(*LinearAlgebra*) :

$A := Matrix\left(\left[\left[0, \frac{3}{4}, 0\right], \left[\frac{3}{4}, 0, 1\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right]\right]\right);$
$Eigenvectors(A);$
$P := \%[2];$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{12}{7} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{16}{7} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{12}{7} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{16}{7} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

$P.DiagonalMatrix\left(\left[-\frac{1}{4^n}, 1, -\frac{3^n}{4^n}\right]\right).P^{(-1)};$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{10\,4^n} + \frac{12}{35} - \frac{5}{14}\frac{3^n}{4^n} & -\frac{3}{10\,4^n} + \frac{12}{35} + \frac{9}{14}\frac{3^n}{4^n} & \frac{6}{5\,4^n} + \frac{12}{35} - \frac{6}{7}\frac{3^n}{4^n} \\ \frac{1}{10\,4^n} + \frac{16}{35} + \frac{5}{14}\frac{3^n}{4^n} & \frac{1}{10\,4^n} + \frac{16}{35} - \frac{9}{14}\frac{3^n}{4^n} & -\frac{2}{5\,4^n} + \frac{16}{35} + \frac{6}{7}\frac{3^n}{4^n} \\ \frac{1}{5\,4^n} + \frac{1}{5} & \frac{1}{5\,4^n} + \frac{1}{5} & -\frac{4}{5\,4^n} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Index

:polynôme
    cyclotomique, 16
ecart-type, 122

anticommutant, 41
application
    conforme, 89
asymptotique
    développement, 29, 50

certain
    évènement, 117
cofacteurs, 24
comatrice, 24
commutant, 33, 39
comparaison
    des séries à termes positifs, 56
    série intégrale, 101
    séries-intégrales, 56
comparaison des normes, 67
conjointe
    loi, 120
convergence
    des dérivées, 100, 101
    normale, 100, 101
    uniforme, 101
        sur tout compact, 94
covariance, 122
critère
    de comparaison logarithmique, 58
    de convergence des séries à termes positifs, 56
    de d'Alembert, 58
cyclotomique
    polynôme, 16

dénombrements, 101
déterminant, 28
    circulant, 25
    d'un endomorphisme, 23
    d'une famille de vecteurs, 23
    d'une matrice, 23
    d'une matrice (propriétés), 23
    de Vandermonde, 25
    mineurs principaux, 28
    opérations élémentaires, 27
    par blocs, 24
    propriétés géométriques, 26
déterminant jacobien, 83
développement limité
    d'une fonction $\mathcal{C}^1$, 83
densité
    dans^R, 73
développement
    asymptotique, 51
différentielle, 89
    d'une fonction $\mathcal{C}^1$, 83
division euclidienne
    polynômes, 11
drapeaux, 39

endomorphisme
    diagonalisable
        topologie, 72
    noyau, 27
    polynôme, 40
    polynôme caractéristique, 27
    réduction, 39, 40
    rang, 27
    symétrique, 80
    trigonalisable, 31
    valeurs propres, 27
équation
    matricielle, 38
équation différentielle
    ordre 2, 116
équations différentielles
    linéaires, 116
    séries entières, 116
    variation des constantes, 116
équivalence
    des t.g. de séries à termes positifs, 56
espace préhilbertien, 80
espaces normés
    continuité, 71
    topologie, 71
Euler
    indicatrice, 13
évènement, 117
    élémentaire, 117
    certain, 117
    impossible, 117
    négligeable, 118
    presque-sûr, 118
    quasi-certain , 118
    quasi-impossible, 118
    quasi-négligeable, 118

Fermat

nombres, 18
fonction
de carré intégrable, 79
Gamma (d'Euler), 101
intégrable, 109
Li (log. intégral), 101
forme
alternée, 22
n-linéaire, 22
formule
de Taylor, 50

Gram-Schmidt
procédé de, 79
groupe, 9
homéomorphismes de $\mathbb{R}$, 20

Hölder
inégalité de, 52
harmonique
fonction, 112

idéal, 10
image
d'une valeur propre par un polynôme, 32
impossible
évènement, 117
inégalité
de Bessel, 76
de Cauchy-Schwartz, 79
de Hölder, 52
intégrale
à paramètre, 106, 111
calculs basiques, 101
changement de variable, 108, 109
comparaison, 109
comparaisons, 116
de Fresnel, 62
inversibles
de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 13

Lagrange
théorème, 9
lemme
de décomposition des noyaux, 33
des noyaux, 43
limite uniforme
de fonctions continues, 93
loi
conjointe, 120

matrice
circulante (vecteur propre d'une), 25
de Vandermonde, 25
des cofacteurs, 24
inverse, 24
quasi-antisymétrique, 30
matrice jacobienne, 83
matrices
compagnes, 29
Mersenne
nombres, 18
minimum, 79
morphisme
canonique, 13
de groupe, 9

n-uplet
de variables aléatoires, 120
négligeable
évènement, 118
norme
matricielle, 71
noyau
d'un groupe, 9
de Poisson (disque), 112
noyaux
décomposition, 33

permutation
dérangement, 101
Poisson
noyau, 112
polynôme
annulateur, 32, 42
caractérisation, 32
d'endomorphisme, 32, 39
d'interpolation de Lagrange, 39
minimal, 32
racines d'un, 50
presque-sûr
évènement, 118
produit
de convolution, 112
infini, 62
produit scalaire, 79
matriciel, 41
projection orthogonale
sur un sev de dim finie, 76

quasi-certain
évènement, 118
quasi-impossible
évènement, 118

récurrence

linéaire d'ordre 2, 29, 155
racines
polynômes, 50
règle
de d'Alembert, 58
reste
d'une série simplement convergente, 92
Riemann
lemme de, 233
somme de, 63

série
d'intégrales, 110
de fonction
simplement convergente, 92
uniformément convergente, 92
de fonctions, 92, 100, 101, 110
de matrices, 71
série entière, 63
calcul d'une somme (EDO), 101
dénombrements, 101
série numérique, 62, 63
comparaison, 62
comparaison avec une intégrale, 61
séries de Bertrand, 61
série
convergente, 55
de Bertrand, 58
de Riemann, 57
divergente, 55
numérique, 55
signature
d'une permutation, 22
somme directe
sous-espaces propres, 31
somme partielle
d'une série, 55
sous-espace
stable, 33
sous-espace propre, 31
stable
sous-espace, 33
suite
d'intégrales, 109, 110
développement asymptotique d'une, 29, 50
supplémentaire
orthogonal, 76
système
complet, 117, 118
différentiel linéaire, 116
systèmes différentiels
linéaires, 116
terme général
d'une série, 55
théorème
caractérisation des end. diagonalisables, 31
par polynôme annulateur, 32
continuité
d'une limite uniforme, 93
continuité des appl. linéaires, 70
continuité et dérivabilité d'une intégr. à param., 106
convergence dominée, 105, 109
de Bezout, 12
de Bolzano-Weierstrass, 72
de Cayley-Hamilton, 32, 39
de convergence dominée, 110
de décomposition des noyaux, 33
de Gauss, 12
de Rolle, 50
des accroissements finis, 50
des noyaux, 39
interversion des limites, 94
(cas des séries), 94
série d'intégrales, 105
stabilité des sev propres, 33
topologie
dans un préhilbertien, 76
sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), 72
tridiagonal
déterminant, 29

Vandermonde
matrice de, 41
variable aléatoire
vectorielle, 120
variance, 122